Soit A stochastique irréductible.

(i) $\rho(A) = 1$

Preuve : $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} \in E_1(A)$ donc $\rho(A) \geq 1$

Soit $\lambda \in Sp(A)$, X un vp associé, X_{k_0} une composante de module maximal. Alors

$$|\lambda X_{k_0}| = |(AX)_{k_0}| \leq \sum_{l=1}^{n} A_{k_0 l}|X_l| \leq \sum_{l=1}^{n} A_{k_0 l}|X_{k_0}| = |X_{k_0}|$$

$|X_{k_0}| > 0$ donc $|\lambda| \leq 1$ donc $\rho(A) = 1$

(ii) $G = Sp(A) \cap \mathbb{U} = \mathbb{U}_d$ où $d \in \mathbb{N}^*$.

L'inégalité précédente devient une égalité donc

$\rightarrow \left|\sum_{l=1}^{n} A_{k_0 l} X_l\right| = \sum_{l=1}^{n} A_{k_0 l}|X_l|$ donc les $A_{k_0 l} X_l$ sont positivement liés : $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tq $\forall l$, $A_{k_0 l}X_l = A_{k_0 l}|X_l|e^{i\theta}$

$\rightarrow \sum_{l=1}^{n} A_{k_0 l}|X_l| = \sum_{l=1}^{n} A_{k_0 l}|X_{k_0}|$ donc $\forall l$, $A_{k_0 l}|X_l| = A_{k_0 l}|X_{k_0}|$ (car sinon on a une inégalité stricte).

On a donc $A_{k_0 l} X_l = A_{k_0 l}|X_{k_0}|e^{i\theta}$

En sommant on obtient $\lambda X_{k_0} = |X_{k_0}|e^{i\theta}$ donc

$\forall l \in [\![1;n]\!]$ $A_{k_0 l} X_l = A_{k_0 l} \lambda X_{k_0}$ $(*)$

A est irréductible donc $\exists m \in \mathbb{N}^*$ tq $A^m_{k_0 l} > 0$

A^m est stochastique et $A^m X = \lambda^m X$

Donc $\forall l$, $A^m_{k_0 l} X_l = A^m_{k_0 l} \lambda^m X_{k_0}$ (d'après $(*)$)

donc $X_l = \lambda^m X_{k_0}$

Donc, (quitte à prendre $X_{k_0} = 1$) $|X_l|$ est de module maximal et est entièrement déterminé par λ et m.

Donc $\underline{\dim E_\lambda(A) = 1}$

$\underline{\text{Mq } G \text{ est un sous-groupe de } \mathbb{U}:}$

$\rightarrow 1 \in G$

$\rightarrow$ Si $\lambda \in G$, alors vu que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\bar{\lambda} \in Sp(A)$, or $\lambda \in \mathbb{U}$ donc $\bar{\lambda} = \lambda^{-1} \in \mathbb{U}$

$\rightarrow$ Soient $\mu; g \in G$ et $X; Y$ des vp associés.

On prend $Z = [X_k Y_k]_{k \in [\![1;n]\!]}$. $Z \neq 0$ car les $|X_k|$ et $|Y_k|$ sont maximaux. Donc on peut calculer

$$(AZ)_k = \sum_{l=1}^{n} A_{kl} X_l Y_l = \sum_{l=1}^{n} A_{kl} \lambda X_k Y_l \quad \text{(d'après } (*))$$

$$= \lambda X_{k} \sum_{l=1}^{n} A_{kl} \mu Y_k$$

$$= \lambda \mu X_k Y_k = \lambda \mu Z_k$$

Donc $\lambda\mu \in Sp(A)$ et $|\lambda\mu| = 1$ donc $\lambda\mu \in G$.

Donc G est un sous-groupe fini de G, on a donc $G = \mathbb{U}_d$ avec $d \in \mathbb{N}^*$

Montrons que le sous-espace caractéristique $N_\lambda = E_\lambda$ pour $\lambda \in G$:

Sq $E_\lambda \subsetneq N_\lambda$, on considère l'endomorphisme u induit par A sur N_λ. On a donc $X \in \mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)^2 \setminus E_\lambda$. On donne la décomposition de Dunford de $u = \lambda id + n$ où $n \neq 0$ nilpotente. Alors $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$u^{(k)}(X) = \lambda^k X + k\lambda^{k-1} n(X)$$

Donc $\|u^{(k)}(X)\| \geq k\|n(X)\| - \|X\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$

Mais A^k est stochastique donc bornée donc $\|u^{(k)}(X)\|$ aussi (par équivalence des normes). Donc c'est absurde. donc $N_\lambda = E_\lambda$ avec $\dim E_\lambda = 1$.

Ainsi $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $A = P\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \omega & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^{d-1} \\ 0 & & & & B \end{pmatrix}P^{-1}$

avec $\rho(B) < 1$; $\omega = \exp\left(\frac{2ik\pi}{d}\right)$

On peut alors montrer le théorème ergodique fini :

$$\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} A^i = P\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots \ \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\omega^{im} & \\ & & \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}B^i \end{pmatrix}P^{-1}$$

$\rightarrow$ $\rho(B) < 1$ donc on a une norme subordonnée où $\|B\| < 1$

donc $\left\|\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}B^i\right\| \leq \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\|B\|^i \leq \frac{1}{k(1-\|B\|)} \to 0$

$\rightarrow$ $\left|\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\omega^{im}\right| = \left|\frac{1-\omega^{km}}{k(1-\omega^m)}\right|$ $(m \in [\![1;d-1]\!])$

$$\leq \frac{2}{k|1-\omega^m|} \longrightarrow 0$$

Donc par continuité des opérations sur les matrices, $\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} A_i = PE_{11}P^{-1}$

Or $APE_{11}P^{-1} = PE_{11}P^{-1}$ donc en moyenne, il y a convergence des l'unique proba stable.

Cas $d=1$: $A = P\begin{pmatrix} 1 & \\ & B\end{pmatrix}P^{-1}$

Alors $A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} PE_{11}P^{-1}$ et on en déduit la convergence.

⚠ PE_1P^{-1} est stochastique car limite de matrice stochastique qui est un fermé et de rang 1 donc toutes ses lignes sont égales, on a donc bien, quelle que soit π_0, $\pi_0 PE_1P^{-1} = \pi$ (n'importe quelle ligne).