1. Lemme des noyaux : ROM p609

Lemme : Soit $(P_i)_{i\in I}$ deux à deux premiers entre-eux et $P = \prod_{i\in I} P_i$.
Soit $Q_i = \frac{P}{P_i}$ alors $(Q_i)_{i\in I}$ sont premiers entre-eux dans leur ensemble et $P_i \wedge Q_i = 1$

Preuve : Si $\Delta = PGCD(Q_i) \neq 1$ on a R non constant, irréductible, $R | Q_1$ donc $\exists k \geq 2$ tq $R | P_k$. Donc $R | \Delta | Q_k$ donc $R | P_j ; j \neq k$
Donc $R | P_k P_j$: absurde. Donc $\Delta = 1$
De même si $R | P_k \wedge Q_k$ alors $R | P_k$ et $P_j ; j \neq k$
ce qui est absurde. Donc $P_k \wedge Q_k = 1$.

Lemme des noyaux : Avec les même notations,
$Ker(P(u)) = \bigoplus_{i\in I} Ker(P_i(u))$ et π_i les projecteurs sur $Ker(P_i(u))$ parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} Ker(P_j(u))$ est un polynôme en u.

Preuve : D'après le théorème de Bézout, on a $(R_i)_{i\in I}$ tq que $\sum_{i\in I} R_i Q_i = 1$
Donc $\forall x \in E$, $\sum_{i\in I} R_i(u) \circ Q_i(u)(x) = x$
Soit $x \in Ker(P(u))$ et $i \in I$:
$P_i(u) \circ (R_i(u) \circ Q_i(u)(x)) = R_i \circ P(u)(x) = 0$ ($K[u]$ commute)
Donc $x_i = R_i(u) \circ Q_i(u)(x) \in Ker(P_i(u))$
On a alors $x = \sum_{i\in I} x_i$ donc $Ker(P(u)) \subset \sum_{i\in I} Ker(P_i(u))$
La réciproque vient de $\forall i \in I$, $Ker(P_i(u)) \subset Ker(P(u))$
Montrons que la somme est directe.
Soit $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Ker(P_i(u))$ tq $\sum_{i\in I} x_i = 0$, mq $\forall i \in I, x_i = 0$.
Soit $k \in I$, $0 = Q_k(u)\left(\sum_{i\in I} x_i\right) = Q_k(u)(x_k)$
Par ailleurs $P_k(u)(x_k) = 0$ et $P_k \wedge Q_k = 1$
Donc $AP_k + BQ_k = 1$ donc
$x_k = (A(u) \circ P_k(u))(x_k) + (B(u) \circ Q_k(u))(x_k) = 0 + 0 = 0$
Donc $Ker(P(u)) = \bigoplus_{i\in I} Ker(P_i(u))$.

1 bis :
les projecteurs sont les $\pi_i : x \mapsto R_i(u) \circ Q_i(u)(x)$ qui sont bien dans $K[u]$

2) Si u et v commutent alors pour [GOU p 176]
$x \in E_\lambda(u)$, $u(v(x)) = v(u(x)) = \lambda v(x)$
Donc $v(x) \in E_\lambda(u)$.

---

3) Sq u et v diagonalisables et commutent.
→ Si on a $u = \lambda id$ alors u et v sont codiagonalisables.

→ Sinon on a $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$, de dimensions strictement inférieure à $\dim E$.
On procède par récurrence sur la dimension, sq si u et v commutent sur E de $\dim \leq n$ alors elles sont codiagonalisables.
Soit $\dim E = n+1$. Alors pour $\lambda \in Sp(u)$, $\dim E_\lambda(u) \leq n$. Et $E_\lambda(u)$ est stable par v. Par ailleurs $\mu_{u_{E_\lambda(u)}} | \mu_u$ et $\mu_{v_{E_\lambda(u)}} | \mu_v$ donc ils sont scindés à racine simple donc elles sont codiagonalisables sur $E_\lambda(u)$. Il suffit alors de considérer une base adaptée à la somme directe.
(pour $n = 1$ on a deux homothéties).

4) Preuve de Dunford : GOU p203

Existence : $E = \bigoplus_{i \in I} N_i$ où $N_i = \ker(\lambda_i id - u)^{\alpha_i}$ le sous-espace caractéristique de λ_i

Sur N_i, on pose $d_i = \lambda_i id$ $n_i = u_{|N_i} - d_i$
(bien définie par stabilité).
$n_i^{\alpha_i} = 0$ par construction et d_i diagonalisable.
On pose $d = \sum_{i \in I} d_i \circ \pi_i$ où les π_i projecteurs sur N_i //ment à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$

$$n = \sum_{i \in I} n_i \circ \pi_i$$

On a bien d diagonalisable, n nilpotente : $\alpha = \sup(\alpha_i | i \in I)$ alors $n^\alpha = 0$. d et n sont des polynômes en u donc ils commutent.

Unicité : $u = d + n = d' + n'$ tq $dn = nd$ et $d'n' = n'd'$
→ $ud' = d'u$ donc N_i est stable par d'
$d_{N_i} = \lambda_i id_{N_i}$ donc sur N_i, $d \circ d' = d' \circ d$
Donc d et d' commutent donc elles sont codiagonalisables, donc $d' - d = n - n'$ est diagonalisable.
Or $(n - n')^{p+q} = \sum_{i=0}^{p+q} \binom{p+q}{i} (-1)^{p+q-i} n^i n'^{p+q-i}$
avec $n^p = 0$ et $n'^q = 0$ on a soit $n^i = 0$ $(i \geq p)$ ou $n'^{p+q-i} = 0$ $(i \leq p)$
Donc $n - n'$ nilpotente donc nulle d'où l'égalité.

5) ROM p 634 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Lemme : $u = d + v$ alors $e^u = e^d + e^d(e^v - id)$ est la décomp. de Dunford de e^u.

Preuve : $e^u = e^d e^v = e^d \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k!} v^k \quad (v^q = 0)$

$$= e^d \left(Id + v \sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{k!} v^{k-1} \right)$$

$$= e^d + \underbrace{v e^d \sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{k!} v^{k-1}}_{w}$$

$(vw)^q = v^q w^q = 0$ (ça commute). e^d est diag

Donc on a la décomposition de Dunford.

Preuve de e^d diagonalisable :

Sur $E_\lambda(d)$, $e^d = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} d^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} id$

$$= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) id$$

Et $vw = e^d \sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{k!} v^k = e^d (e^v - id)$

~~Th~~ Théorème : u est diagonalisable ssi e^u l'est.

($\Rightarrow$) Déjà montré

($\Leftarrow$) e^u diagonalisable donc $e^d(e^v - id) = 0$

Donc $e^v = id$ (car $e^d \in GL_n(\mathbb{C})$)

Donc $\sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k!} v^k = id \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{k!} v^k = 0$

Or $\mu_v = X^q$ donc $\sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{k!} X^k \mid X^q$ donc $q = 1$

Donc $v = 0$ donc u est diagonalisable

~~Version sans lemme :~~

~~e^u diag $\Rightarrow u$ diag. Avec $u = d + n$~~

~~Sq $n \neq 0$ alors $\exists x \in E \setminus \mathrm{Ker}(n)$~~

~~Ainsi $e^{n}(x) = x$~~