**Enoncé :** Soit G un groupe d'ordre $p^\alpha m$, où p est premier, m un non-multiple de p.

1. Il existe des p-sylow de G.
2. Tout p-sous-groupe de G est contenu dans un p-sylow, de plus les p-sylow sont conjugués.
3. Soit $n_p$ le nombre de $p-$ sylow de G, alors $n_p \equiv 1[p]$de plus $n_p|m$.

**Preuve :** Soit $\Gamma = \{X \subset G, |X| = p^\alpha\}$.

Montrons que $|\Gamma| = \binom{p^\alpha m}{p^\alpha} \equiv m\ [p]$.

Dans $F_p[X, Y]$, on a :

$$(X+Y)^{p^\alpha m} = \sum_{k=0}^{p^\alpha m}\binom{p^\alpha m}{k}X^{p^\alpha m-k}Y^k=((X+Y)^{p^\alpha})^m = (X^{p^\alpha}+Y^{p^\alpha})^m=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}X^{p^\alpha(m-k)}Y^{p^\alpha k}$$

L'égalité au coefficient de $X^{p^\alpha(m-1)}Y^{p^\alpha}$ donne que $\binom{p^\alpha m}{p^\alpha} = m$ dans $F_p$, ce qu'il fallait démontrer.

1. Soit l'action à gauche de G sur $\Gamma$. Soit C un échantillonnage des orbites.
   On écrit l'équation aux classes :
   $|\Gamma| = \sum_{A\in C}\frac{|G|}{|stab(A)|}$ ; $\exists A, p \nmid \frac{|G|}{|stab(A)|}$, c'est à dire que $p^\alpha||stab(A)|$.

Soit x dans A, alors $stab(A).x \subset A$. De plus, en remarquant que l'application $G \to G$

$t \mapsto tx$

est bijective, alors $|stab(A)| = |A| = p^\alpha$ , d'où l'existence d'un p-sylow de G, qu'on nomme H.

2. Soit maintenant H' un p-sous-groupe de G de cardinal $p^\beta$, montrons que H' est inclus dans un conjugué de H, ce qui démontrera toutes les assertions de 2 .
   H' agit sur $\left(G/H\right)_s$ l'ensemble des classes à gauche de G modulo H par translations à gauche. Soit C' un échantillonnage des orbites.
   L'équation aux classes donne :
   $|\left(G/H\right)_s|=m=\sum_{\bar{A}\in C'}\frac{p^\beta}{|stab(\bar{A})|}$ . L'existence d'orbites singletons est claire, sinon m serait multiple de p. Soit A=aH une orbite singleton. Alors, $\forall h' \in H', \exists h \in H, ah' = ha$
   $\Leftrightarrow \forall h' \in H', \exists h \in H, h' = a^{-1}ha$ donc $H' \subset a^{-1}Ha$.
3. On reprend l'action de 1. et on choisit C de façon que chaque p-sylow soit le représentant de son orbite. Ce qui est possible puisque si deux p-sylow H et K soient dans la même orbite, alors K=xH. x$\in$ K donc $H = x^{-1}K \subset K$. Par cardinalité on a donc H=K.
   Soit S l'ensemble des p-sylow de G, l'équation aux classes donne :
   $|\Gamma| = \sum_{A\in C}\frac{|G|}{|stab(A)|} = \sum_{A\in S} m + \sum_{A\in C\setminus S}\frac{|G|}{|stab(A)|}$. On remarque que $\forall A \in C\setminus S, p|\frac{|G|}{|stab(A)|}$ (pour l'explication voir 1. ), il s'ensuit que $m \equiv |\Gamma| \equiv mn_p|[p]$, d'où $n_p \equiv 1[p]$
   Soit l'action de G sur *S* par automorphismes intérieurs. L'action est transitive, et donc on a : $\begin{cases} n_p|p^\alpha m \\ n_p \equiv 1[p] \text{et donc } n_p \wedge p = 1 \end{cases}$
   On conclut que $n_p|m$.□