Développement : Espace de Bergman B^2.

Notations à utiliser :

- $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$
- $S^1 = \partial D$
- K un compact fixé inclus dans D
- $B^2(D) = \{f \in \mathbb{C}^D, \int_D |f|^2 d\lambda < \infty\} = \mathcal{L}^2(D,\lambda) \cap H(D)$
- $\langle \cdot | \cdot \rangle_D : (f,g) \mapsto \int_D f\bar{g} d\lambda$
- $\| \cdot \|_2$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle_D$.

Résultats à démontrer :

1. Soit $f \in B^2(D), alors \max_{a \in D} |f(a)| \leq \frac{\|f\|_2}{\sqrt{\pi} d(K,S^1)}$.
2. L'espace $(B^2(D), \langle \cdot | \cdot \rangle_D)$ *est de Hilbert*.
3. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $e_n : z \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n$ *est une base hilbertienne de* $B^2(D)$
4. Pour tout $z \in D, f(z) = \int_D \frac{f(\omega)}{(1 - z\bar{\omega})} d\omega$.

Preuves :

1.Montrons que $\iint_{]0,r[\times]0,2\pi[} f(a + \rho e^{i\theta}) d\lambda. = 2\pi f(a) \int_0^r \rho d\rho = \pi r^2 f(a)$

D'abord $\int_{b(a,r)} f d\lambda = \iint_{]0,r[\times]0,2\pi[} f(a + \rho e^{i\theta}) d\lambda = \iint_{]0,r[\times]0,2\pi[} f(a + \rho e^{i\theta}) \rho d\rho d\theta.$

On est dans les conditions d'appliques les théorèmes de Tonelli et Fubini, à savoir :

- $\theta \mapsto f(a + e^{i\theta})$ *est intégrable sur* $b(a,r)$
- $\rho \mapsto \int_0^{2\pi} \rho f(a + e^{i\theta}) d\theta$ *est continue* (*conséquence du théorème de continuité* sous le signe intégrale), donc mesurable.

Donc $\iint_{]0,r[\times]0,2\pi[} f(a + \rho e^{i\theta}) d\lambda. = \int_0^r \rho \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) d\theta d\rho$.

Evaluons $\int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) d\theta$.. *Appliquons la formule intégrale*

de Cauchy: $f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial b(a,r)} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial b(a,\rho)} \frac{f(a + \rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}} d(\rho e^{i\theta}) =$

$\frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+\rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}} i \rho e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) d\theta.$

donc $\int_0^r \rho \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) d\theta d\rho = 2\pi f(a) \int_0^r \rho d\rho = \pi r^2 f(a)$.

Soit, $\langle \cdot | \cdot \rangle_{a,r} : (f,g) \mapsto \int_{b(a,r)} f\bar{g} d\lambda$ (*l'induit du produit scalaire* $\langle \cdot | \cdot \rangle_D$). *L'inégalité de Cauchy – Schwarz implique que* :

$\left| \langle f | \tilde{1} \rangle_{a,r} \right| \leq \|f\|_{a,r} \|\tilde{1}\|_{a,r} \leq \|f\|_2 \|\tilde{1}\|_{a,r} \leq \|f\|_2 \sqrt{\pi} r$. On aura par conséquent $f(a) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \|f\|_2$.
et ceci pour tout r. Il s'ensuit que $f(a) \leq \lim_{r \to 1-|a|} \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \|f\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}(1-|a|)} \|f\|_2 \leq \frac{\|f\|_2}{\sqrt{\pi} d(K,S^1)}$.

N.B : La dernière inégalité découle du fait que $d(K,S^1) \leq 1 - |a|$ *puisque* $a \in K$.

2. L'équivalence entre les assertions «$(B^2(D), \langle \cdot | \cdot \rangle_D)$ *est de Hilbert* » et « $(B^2(D), \| \cdot \|_2)$ *est de Banach* »(assertion qu'on va démontrer tout de suite) est triviale.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy dans* $(B^2(D), \| \cdot \|_2)$. *De* **1.**, *il découle que*

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N},\forall p>q>n_\varepsilon,\forall z\in D,\left|f_p(z)-f_q(z)\right|\leq\frac{\|f_p-f_q\|_2.}{\sqrt{\pi}d(K,S^1)}<\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}d(K,S^1)},$$

Ainsi $(f_n)_n$ *est de Cauchy dans* $(H(D),\|\cdot\|_\infty)$ qui est de Banach, donc $\exists f\in H(D), f_n\xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$.
D'autre part, $(f_n)_n$ *est de Cauchy dans* $\mathcal{L}^2(D,\lambda)$, *donc par le théorème de Riesz – Fischer, il existe une sous – suite* $(f_{\Phi(n)})_n$ *qui converge* λ *– presque partout vers* $g\in\mathcal{L}^2(D,\lambda)$. *Par* unicité de la limite, $f\overset{\lambda-p.p.}{=}g$. donc $f\in\mathcal{L}^2(D,\lambda)$ *et par suite* $f\in B^2(D)$, *ce qui conclut.*

3.Soit p et q deux entiers distincts. On a :

- $\langle e_p|e_p\rangle_D=\int_D e_p\overline{e_p}d\lambda=\frac{p+1}{\pi}\int_0^1\rho^{2p+1}(\int_0^{2\pi}d\theta)\,d\rho=1.$
- $\langle e_p|e_q\rangle_D=\int_D e_p\overline{e_q}d\lambda=\frac{\sqrt{(p+1)(q+1)}}{\pi}\int_0^1\rho^{2p+1}(\int_0^{2\pi}e^{i(p-q)\theta}d\theta)\,d\rho=$ $.\frac{\sqrt{(p+1)(q+1)}}{\pi}\int_0^1\rho^{2p+1}.0.\,d\rho=0$

La famille est ainsi orthonormale. Montrons qu'elle totale, autrement dit $((e_n)_n)^\perp=\{O_{B^2(D)}\}$.
Soit $n\in\mathbb{N}, f\in((e_n)_n)^\perp$, *alors* $0=\langle z^n|f\rangle=\langle z^n|\sum_{k=0}^\infty a_kz^k\rangle$ ($\sum_{n\geq0}a_nz^n$ *est le* développement en série entière de f qui est holomorphe c'est-à-dire analytique).
Or $\langle z^n|\sum_{k=0}^\infty a_kz^k\rangle=\sum_{k=0}^\infty a_k\langle z^n|z^k\rangle=\sum_{k=0}^\infty\frac{\pi a_k}{\sqrt{(k+1)(n+1)}}\langle e_n|e_k\rangle=\frac{\pi a_n}{n+1}$, *ainsi* $a_n=0$ *et ceci* $\forall n\in\mathbb{N}$, *ce qui conclut.*

4.On fixe z dans D. On définit l'application $ev_z: B^2(D)\to\mathbb{C}$

$$f\mapsto f(z)$$

$ev_z\in\left(B^2(D)\right)^*$. *Du lemme 1 découle la continuité de* ev_z *puis le théorème de représentation de Riesz – Fréchet nous donne que* $\exists!\,k_z$ *in* $B^2(D), ev_z=\langle\cdot|k_z\rangle$. Rappelons que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base hilbertienne, donc*

$$\overline{k_z}=\overline{\sum_{n=0}^\infty\langle k_z|e_n\rangle e_n}=\sum_{n=0}^\infty\overline{\langle k_z|e_n\rangle}\,\overline{e_n}=\sum_{n=0}^\infty e_n(z)\overline{e_n}.$$

La série ci – dessus converge non seulement pour la norme $\|\cdot\|_2$, *mais uniformément (presque partout comme conséquence du lemme 2, partout* par holomorphie) sur tout compact de D. Pour $w\in D$,

$$\overline{k_z(w)}=\sum_{n=0}^\infty\overline{\langle k_z|e_n\rangle}\,\overline{e_n(w)}=\sum_{n=0}^\infty e_n(z).\overline{e_n(w)}=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^\infty(n+1)(z\overline{w})^n=\frac{1}{\pi}.\frac{1}{(1-z\overline{w})^2}$$

Ainsi $f(z)=\langle f|k_z\rangle==\int_D f(w)\overline{k_z(w)}\,dw=\int_D\frac{f(w)dw}{\pi(1-z\overline{w})^2}.\square$