Développement 2. Un isomorphisme exceptionnel, $\mathcal{SO}(3)$ et les quaternions

Recasages : 103, **106**, 108, 127, 151, 158, **161**, **191**

Introduction

Les rotations de l'espace jouent un rôle central en géométrie et en informatique. Deux groupes les décrivent : $\mathcal{SO}(3)$, groupe des isométries directes de $\mathbb{R}^3$, et $\mathrm{SU}(2)$, sphère unité de $\mathbb{H}$. L'objet de ce développement est d'établir l'isomorphisme exceptionnel $\mathcal{SO}(3) \cong \frac{\mathrm{SU}(2)}{\{-\mathbf{1},\mathbf{1}\}}$. Ce résultat est dit exceptionnel au sens où il n'a pas d'analogue dans les dimensions supérieures.

Le développement

[1] **1. Thm.** On a l'isomorphisme exceptionnel :

$$\mathrm{SO}(3) \cong \frac{\mathrm{SU}(2)}{\{-\mathbf{1},\mathbf{1}\}}$$

Démo du thm. 1. On considère l'action par conjugaison de $\mathrm{SU}(2)$ sur $\mathbb{H}$ (qui n'est pas triviale car $\mathbb{H}$ n'est pas abélien). Pour tout $U \in \mathrm{SU}(2)$, on pose alors la fonction $\varphi_U : Q \mapsto UQU^{-1}$ définie de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$ et qui est bijective d'inverse $\varphi_{U^{-1}}$ (on vérifie que $\varphi_U \circ \varphi_{U^{-1}} = \varphi_{I_2} = I_2$ et $\varphi_{U^{-1}} \circ \varphi_U = I_2$). On note $\Phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathfrak{S}(\mathbb{H}), U \mapsto \varphi_U$ qui est morphisme de groupe (c'est le morphisme associé à l'action considérée). De plus pour tout $U \in \mathrm{SU}(2)$, $N(U)N(U^{-1}) = N(I_2) = 1$, on a $N(\varphi_U(Q)) = N(UQU^{-1}) = N(Q)$ pour tout $Q \in \mathbb{H}$ par multiplicativité de la norme.

Comme l'application φ_U est linéaire, on a donc $\mathrm{Im}(\Phi) \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{H})$. D'autre part l'ensemble des quaternions pures $\mathbb{I}$ est stable par φ_U pour tout $U \in \mathrm{SU}(2)$. En effet pour tout $Q \in \mathbb{I}$, on a

$$\mathrm{Re}(\varphi_U(Q)) = \frac{UQU^{-1} + \overline{UQU^{-1}}}{2} = \frac{UQ\overline{U} + \overline{UQ\overline{U}}}{2} = U\frac{(Q+\overline{Q})}{2}\overline{U} = 0$$

On peut donc définir $\widetilde{\Phi_U} := (\Phi_U)_{|\mathbb{I}} \in \mathcal{O}(\mathbb{I}) \cong \mathcal{O}(3)$ et le morphisme associé $\widetilde{\Phi} : \mathrm{SU}(2) \to \mathcal{O}(3), U \mapsto \widetilde{\Phi_U}$. Le noyau de $\widetilde{\Phi}$ est composé des éléments de $\mathrm{SU}(2)$ qui commutent avec tout élément de $\mathbb{I}$ et donc qui commutent avec tout $\mathbb{H}$. Ainsi $\mathrm{Ker}(\widetilde{\Phi}) = \mathcal{Z}(\mathbb{H}) \cap \mathrm{SU}(2) = \{\pm\mathbf{1}\}$.

Montrons que $\mathrm{Im}(\widetilde{\Phi}) \subseteq \mathcal{SO}(3)$. On munit $\mathrm{SU}(2)$ de la topologie euclidienne en voyant $\mathrm{SU}(2)$ comme $\mathbb{S}^3$ dans $\mathbb{R}^4$. De même, on munit $\mathcal{O}(3)$ de la norme subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^3$. Pour $U \in \mathrm{SU}(2)$ tel que $U = a\mathbf{1} + b\mathbf{I} + c\mathbf{J} + d\mathbf{K}$, les coefficients de la matrice de $\widetilde{\Phi_U}$ sont des polynômes en a, b, c, d, donc $\widetilde{\Phi}$ est continue. En effet, on a par exemple l'image de $\mathbf{I}$ qui vaut

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi_U}(\mathbf{I}) = U\mathbf{I}\overline{U} &= (a\mathbf{1} + b\mathbf{I} + c\mathbf{J} + d\mathbf{K})\mathbf{I}(a\mathbf{1} - b\mathbf{I} - c\mathbf{J} - d\mathbf{K}) \\ &= (a\mathbf{I} - b\mathbf{1} - c\mathbf{K} + d\mathbf{J})(a\mathbf{1} - b\mathbf{I} - c\mathbf{J} - d\mathbf{K}) \\ &= (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)\mathbf{I} + (2ad + 2bc)\mathbf{J} + (bd + da - 2ac)\mathbf{K}\end{aligned}$$

Or $\det : \mathcal{O}(3) \to \{-1, 1\}$ est continue, donc $\det \circ \widetilde{\Phi} : \mathrm{SU}(2) \to \{-1, 1\}$ est continue.

2. Lem. La sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs. En particulier $\mathrm{SU}(2)$ est connexe par arcs. [1]

Démo du lem. 2. Soient a et b deux points de la sphère non antipodaux. On définit le chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{S}^{n-1}$ par $\gamma(t) = \frac{(1-t)a+tb}{\|(1-t)a+tb\|_2}$. La fonction γ est bien définie car $\|(1-t)a + tb\|_2 \neq 0$, en effet $\|a\| = \|b\| = 1$ et $(1-t)a + tb = 0$ entraîne $1 - t = t$ donc $t = 1/2$ donc $a = -b$ ce qui est exclu. Les points a et b sont donc reliés par γ. Pour deux points antipodaux $a = -b$, il suffit de passer par un autre point intérmédiaire quelconque de la sphère à l'aide de la construction précédente. ■

Suite de la démo du thm. 1. Comme $\mathrm{SU}(2)$ est connexe, l'image de $\mathrm{SU}(2)$ par $\det \circ \widetilde{\Phi}$ est aussi connexe. Or $\{-1, 1\}$ n'est pas connexe, donc $\det(\widetilde{\Phi}(\mathrm{SU}(2))$ est un singleton, or $\widetilde{\Phi}(\mathbf{1}) = I_3$, on a $\det(\widetilde{\Phi}(\mathrm{SU}(2)) = \{1\}$, donc $\mathrm{Im}(\widetilde{\Phi}) \subseteq \mathcal{SO}(3)$.

Il reste à montrer que $\widetilde{\Phi}$ est surjective. Comme $\mathcal{SO}(3)$ est engendré par les retournements, il suffit de montrer que tous les retournement sont atteints. Soit ρ_v un retournement d'axe $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, qu'on identifie au quaternion pure $V = v_1\mathbf{I} + v_2\mathbf{J} + v_3\mathbf{K}$. Comme ρ_v et $\rho_{\lambda v}$ correspondent au même retournement, on peut supposer que v est unitaire de sorte que $V \in \mathbb{I} \cap \mathrm{SU}(2)$, donc $V\overline{V} = \mathbf{1}$ et $\overline{V} = -V$, d'où $V^2 = -\mathbf{1}$ et $\widetilde{\Phi_V}^2 = \widetilde{\Phi_{V^2}} = \widetilde{\Phi_{-\mathbf{1}}} = \mathrm{id}_{\mathbb{I}}$. Or on sait que $\widetilde{\Phi_V} \in \mathcal{SO}(3)$, donc $\widetilde{\Phi_V}$ est une symétrie orthogonale et il reste à montrer que l'espace fixe est une droite. Les potentielles valeurs propres sont ± 1, et , comme $\det(\widetilde{\Phi_V}) = 1$, alors -1 est de multiplicité paire et 1 est de multiplicité impaire. Comme $V \in \mathbb{I}$ et que $\mathrm{Ker}(\widetilde{\Phi}) \cap \mathbb{I} = \varnothing$, on a donc $\widetilde{\Phi_V} \neq \mathrm{id}_{\mathbb{I}}$, d'où 1 ne peut pas être valeur propre de multiplicité 3. Ainsi la valeur propre 1 est de multiplicité 1, ce qui prouve que $\widetilde{\Phi_V}$ est un retournement qui fixe v donc $\widetilde{\Phi_V} = \rho_v$.

Par le premier théorème d'isomorphisme,

$$\frac{\mathrm{SU}(2)}{\{-\mathbf{1},\mathbf{1}\}} \cong \mathcal{SO}(3)$$

■

Références

[1] L. Isenmann et T. Pecatte. *L'oral à l'agrégation de mathématiques : une sélection de développements*. 2e éd. Références sciences. Ellipses, 2024.

Ce qui orbite autour du développement

3. Déf. On définit l'ensemble des *quaternions*, noté $\mathbb{H}$, le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ définit par

$$\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} z & -\overline{\omega} \\ \omega & \overline{z} \end{pmatrix} : z, \omega \in \mathbb{C} \right\}$$

4. Lem. $\mathbb{H}$ est un anneau à division. De plus c'est une $\mathbb{R}$-algèbre non commutative engendrée par $\mathbf{1}, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ où

$$\mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{I} := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \ \mathbf{J} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ \text{ et } \ \mathbf{K} := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

on vérifie que $\mathbf{I}^2 = \mathbf{J}^2 = \mathbf{K}^2 = \mathbf{IJK} = -\mathbf{1}$. Tout quaternion s'écrit alors de manière unique $a\mathbf{1} + b\mathbf{I} + c\mathbf{J} + d\mathbf{K}$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

5. Déf. On définit la norme $N(Q)$ d'un quaternion $Q = a\mathbf{1} + b\mathbf{I} + c\mathbf{J} + d\mathbf{K}$ par $N(Q) := \sqrt{\det(Q)}$, ce qui correspond à la norme euclidienne où $\mathbb{H}$ est vu comme $\mathbb{R}^4$. Cette norme est multiplicative.

6. Nota. On note $\mathrm{SU}(2)$ le groupe des quaternions de norme 1 qui sera identifié en tant qu'ensemble à la sphère unité $\mathbb{S}^3$ de $\mathbb{R}^4$.

7. Déf. Pour $Q = a\mathbf{1} + b\mathbf{I} + c\mathbf{J} + d\mathbf{K} \in \mathbb{H}$, on note $\mathrm{Re}(Q) = a\mathbf{1}$ sa *partie réelle*, $\mathrm{Im}(Q) = b\mathbf{I} + c\mathbf{J} + d\mathbf{K}$ sa *partie quaternionique pure* et $\overline{Q} = a\mathbf{1} - b\mathbf{I} - c\mathbf{J} - d\mathbf{K}$ son *conjugué*. L'ensemble des quaternions purs (de partie réelle nulle) est noté $\mathbb{I}$, et on identifie l'ensemble des quaternions réelles (de partie quaternionique nulle) à $\mathbb{R}$. Par suite $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{I}$.

8. Lem. Pour tout $Q, R \in \mathbb{H}$, on a $\overline{QR} = \overline{R}\,\overline{Q}$. De plus $Q + \overline{Q} = 2\mathrm{Re}(Q)$ et $N(Q)^2 = Q\overline{Q}$ pour tout $Q \in \mathbb{H}$.

9. Lem. On a $\mathcal{Z}(\mathbb{H}) = \mathbb{R}\mathbf{1}$ et $\mathcal{Z}(\mathbb{H}) \cap \mathrm{SU}(2) = \{\pm\mathbf{1}\}$.

10. Déf. Un *retournement* de $\mathbb{R}^3$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de la forme $\rho_v : x \mapsto 2\frac{(x\,|\,v)}{\|v\|_2^2} v - x$ où $v \in \mathbb{R}^3$.

11. Rem. Géométriquement, un retournement est une symétrie orthogonale par rapport à une droite et l'*axe* d'un retournement est la direction du sous-espace fixé par le retournement.

On peut montrer que si $u \in \mathcal{SO}(3)$ vérifie $u^2 = \mathrm{id}$ et que sa valeur propre 1 soit de multiplicité 1, alors c'est le retournement ρ_v où v est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

12. Thm. $\mathcal{SO}(3)$ est engendré par les retournements.

Questions et exercices « classiques »

1. Mettre $Q = \mathbf{1} - 2\mathbf{I} + \mathbf{J} - 3\mathbf{K}$ sous *forme polaire* $\rho\cos(\alpha)\mathbf{1} + \rho\sin(\alpha)U$ avec $\alpha \in [0, 2\pi[$ et $U \in \mathbb{I} \cap \mathrm{SU}(2)$. Identifier la rotation correspondante (axe et angle associé).
2. Soient $u, v \in \mathbb{R}^3$ et U, V les quaternions purs associés. Montrer que $\mathrm{Re}(UV) = -\,(u\,|\,v)$ et $\mathrm{Im}(UV)$ s'identifie à $u \wedge v$.
3. Montrer que (u, v, w) est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ si, et seulement si les quaternions purs associés vérifient $U^2 = V^2 = W^2 = -\mathbf{1}$ et $UV = W$.
4. Pour la rotation d'axe $e_3 = (0,0,1)$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$, déterminer le quaternion unitaire Q associé, et vérifier que QVQ^{-1} code bien cette rotation.
5. Déterminer l'axe et l'angle de $R_{\theta,u} \circ R_{\alpha,v}$ en faisant le produit de leurs quaternions associés.

Pour aller plus loin

On retrouve les quaternions dans d'autres domaines des mathématiques. En arithmétique par exemple, l'utilisation des entiers de Hurwitz, qui sont les quaternions de la forme $\frac{a\mathbf{1}+b\mathbf{I}+c\mathbf{J}+d\mathbf{K}}{2} \in \mathbb{H}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, permet de démontrer le théorème de Lagrange suivant :

13. Thm (de Lagrange). Tout entier s'écrit comme somme de carrés.

En théorie des groupes les quaternions apparaissent aussi dans la classification des groupes d'ordre 8. En effet, les éléments $\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{I}, \pm\mathbf{J}, \pm\mathbf{K}$ forment le groupe Q_8 non abélien d'ordre 8 engendré par $\mathbf{I}, \mathbf{J}$ et $\mathbf{K}$, appelé *groupe des quaternions*. Avec le groupe diédral D_8 des isométries du carré, ce sont les seuls groupes non abéliens d'ordre 8.

14. Thm. À isomorphisme près, il existe cinq groupes d'ordre 8 : $\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$, $\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, D_4 et Q_8.