Nom:

MARIT

Prénom:

Anaël

Numéro de Jury:

3

Numéros des sujets tirés:

205 / 239

Intitulé du sujet choisi:

239 - Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

I - Manipulation des ~~intégrales~~ à paramètre

Dans cette partie, (X, F, μ) désigne un espace mesuré et $L^p(\mu)$ l'espace des fonctions mesurables de X à valeurs complexes, de module à la puissance p intégrable si $p < +\infty$

1 - Théorèmes de convergence

Théorème 1 (Beppo-Levi) : soit (f_n) une suite de fonctions mesurables telle que $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$. Alors $\lim_{n \to +\infty} f_n$ est mesurable et
$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n \to +\infty} f_n \, d\mu$$

Exemple 2 : Notons $D_N := \sum_{n=-N}^{N} (x \mapsto e^{inx})$. On a alors, sur $[-\pi, \pi]$:
$$\|D_N\|_1 = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{D_N^2(t)}{\varepsilon + |D_N|^2(t)} \, dt$$

Lemme 3 (Fatou) : soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives. Alors :
$$\int_X \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \int_X f_n \, d\mu$$

Application 4 : Si $(f_n) \in L^1(\mu)^{\mathbb{N}}$ est bornée dans L^1 et converge simplement vers f, f est L^1

Théorème 5 (convergence dominée) : soit $(f_n) \in L^1(\mu)^{\mathbb{N}}$. On suppose f_n converge presque partout vers f et qu'il existe $g \in L^1$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |f_n| \leq g$$
Alors $f \in L^1(\mu)$ et $\int_X |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Contre-exemple 6 : Soit φ une fonction positive, non nulle, à support dans $[0, 1]$. On pose $\varphi_n : x \mapsto \varphi(x-n)$ et on suppose φ bornée. Alors φ_n converge simplement vers 0 mais $\int \varphi_n \, dx$ est constante et non nulle.

Exemple 7 : $\zeta :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $s \longmapsto \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ tend vers 1 à l'infini.

Théorème 8 (Fubini) : Soit $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ un autre espace mesuré. On suppose μ et ν σ-finies. Les assertions suivantes sont équivalentes pour $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ mesurable :

(i) f est $\mu \otimes \nu$-intégrable

(ii) $x \longmapsto \int_Y f(x, y) \, d\nu(y)$ est μ-intégrable

(iii) $y \longmapsto \int_X f(x, y) \, d\mu(x)$ est ν-intégrable.

Dans ce cas, leurs intégrales sont égales

Contre-exemple 9 : on note $\Delta := \{(x, x), x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Notons λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $\#$ la mesure cardinale. Alors :
$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_\Delta \, d\# \, d\lambda = +\infty, \quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_\Delta \, d\lambda \, d\# = 0$$

ADMIS

2 - Régularité sous l'intégrale

On note U un ouvert de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème 10 : soit $f : U \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que :

(i) $\forall x \in X$, $f(-, x)$ est continue

(ii) $\forall u \in U$, $f(u, -) \in L^1(\mu)$

(iii) $\forall K \subset U$ compact, $\exists g_K \in L^1(\mu)$ telle que $\forall (u, x) \in K \times X$, $|f(u, x)| \leq g_K(x)$. Alors $u \longmapsto \int_X f(u, x) \, d\mu(x)$ est continue sur U.

Théorème 11 : avec les mêmes notations on suppose :

(i) $\forall x \in X$, $f(-, x)$ est dérivable

(ii) $\forall u \in U$, $f(u, -) \in L^1(\mu)$

(iii) $\forall K \subset U$ compact, $\exists g_K \in L^1(\mu)$ tq $\forall (u, x) \in U \times X$, $|D_u f(u, x)| \leq g_K$

DÉVELOPPEMENT 1 (1/2)

Intercalaire N°

Alors $u \mapsto \int_X f(u,x)d\mu(x)$ est dérivable et sa dérivée est donnée par $u \mapsto \int_X \partial_u f(u,x)d\mu(x)$.

Exemple 12 : La fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ est C^∞, de dérivées $\Gamma^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} (\log(t))^p e^{-t}t^{x-1}dt$ et convexe sur $\mathbb{R}_+^*$

Théorème 13 : On prend $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Soit $f : U \times X \to \mathbb{C}$ telle que :
(i) $\forall u \in U$, $f(u,-) \in L^1(\mu)$
(ii) $\forall x \in X$, $f(-,x)$ est holomorphe sur U
(iii) $\forall K \subset U$ compact, $\exists g_K \in L^1(\mu)$ tq $\forall (u,x) \in U \times X$, $|f(u,x)| \leq g_K(x)$
Si (X, F, μ) est σ-fini, $F : u \mapsto \int_X f(u,x)d\mu(x)$ est holomorphe sur U et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(u) = \int_X \partial_u^n f(u,x)d\mu(x)dx$.

Exemple 14 : Soit μ une mesure de probabilités à support compact dans $\mathbb{R}$. La fonction $z \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{itz}d\mu(t)$ est entière.

II - Convolution

1 - De la bonne définition de la convolution

Définition 15 : Soient f et g deux fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^d$. On dit qu'elles sont convolables si pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable. Dans ce cas, on note $f*g(x)$ cette intégrale

Exemple 16 : Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles admettant une densité f_X et f_Y, indépendantes $X+Y$ admet pour densité $f_X * f_Y$.

Proposition 17 : Le produit de convolution est bilinéaire et commutatif (sous réserve de bonne définition)

Théorème 18 : Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$, $p \in [1,+\infty]$ et q son exposant conjugué. $f*g$ est définie dans les cas suivants :
(i) $f, g \in L^1$. Dans ce cas $f*g \in L^1$ et $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$
(ii) $f \in L^1$ et $g \in L^p$. Dans ce cas $g*f \in L^p$ et $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$
(iii) $f \in L^p$ et $g \in L^q$. Dans ce cas $f*g \in L^\infty$ et $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

Théorème 19 : Soit $p \in \mathbb{N}$, $f \in L^1_{loc}$ et $g \in C_c^p(\mathbb{R}^d)$. Alors $f*g$ est bien définie, est de classe C^p et :
$$\forall k \leq p, \forall i \in [\![1,d]\!], \partial_i^k(f*g) = f*(\partial_i^k g)$$

2 - Régularisation

Définition 20 (approximation de l'unité, suite régularisante) : une suite de fonctions (f_n) est dite une approximation de l'unité lorsque :
(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} f_n dx = 1$
(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\int_{\|x\| \geq \varepsilon} f_n(x)dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
Si de plus f_n est C^∞ à support compact contenu dans $\bar{B}(0, 1/n)$, on parle de suite régularisante.

Exemples 21 : Le noyau de Gauss défini par :
$$\forall s > 0, \gamma_s : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2s^2}\right)$$
est une approximation de l'unité. La suite :
$$\psi_n : x \mapsto n \exp\left(\frac{1}{1-(nx)^2}\right) \mathbb{1}_{|nx|<1}$$
est une suite régularisante.

Théorème 22 : Soit (φ_n) une approximation de l'unité et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p \in [1,+\infty[$. Alors $\|f*\varphi_n - f\|_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Si f est uniformément continue et bornée, $\|f*\varphi_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Application 23 : $(x \mapsto e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne des fonctions L^2 et 2π-périodiques.

DÉVELOPPEMENT 2

Application 24 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov) : Soit $H \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p \in [1, +\infty[$. On suppose :

(i) H est borné dans L^p

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{d^2}, \forall f \in H, \|x-y\| \leq \eta \Rightarrow \|\tau_x f - \tau_y f\|_p \leq \varepsilon$

(iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0 : \forall f \in H, \|f \mathbb{1}_{\|x\| \geq R}\|_p \leq \varepsilon$

Alors H est relativement compact dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

III - Transformée de Fourier

1 - Cas des fonctions L^1

Définition 25 : Soit $f \in L^1$. On pose $\mathcal{F}[f] : \xi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx$.
Cette intégrale est absolument convergente pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Exemple 26 : $\mathcal{F}[\mathbb{1}_{[-1/2, 1/2]}](\xi) = \frac{\sin(\xi)}{\xi}$ si $\xi \neq 0$, 1 sinon

Lemme 27 (Riemann-Lebesgue) : pour $f \in L^1$, $\mathcal{F}[f]$ est continue et tend vers 0 en $\pm\infty$. De plus :

$$\|\mathcal{F}[f]\|_\infty \leq \|f\|_1$$

Théorème 28 : Soit $f \in L^1 \cap C^1(\mathbb{R})$, $\xi \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\mathcal{F}[f'](\xi) = i\xi \mathcal{F}[f](\xi)$$

Si $f \in L^1$ est telle que $x \longmapsto x f(x)$ est intégrable, alors $\mathcal{F}[f]$ est C^1 et $\mathcal{F}[f]'(\xi) = -i \mathcal{F}[x \longmapsto x f(x)](\xi)$

Application 29 : La transformée de Fourier stabilise l'espace de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide.

Théorème 30 : Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors :

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g]$$

Application 31 : $(L^1(\mathbb{R}), *)$ est une algèbre sans unité.

Théorème 32 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}[f] \in L^1(\mathbb{R})$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](-x)$$

Application 33 : pour $f \in S(\mathbb{R})$, l'équation $u'' - u = f$ a une unique solution dans $S(\mathbb{R})$ donnée par $\frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\left[\frac{-\mathcal{F}[f]}{1+\xi^2}\right]$

2 - Fonction caractéristique en probabilités

Définition 34 : Soit X une variable aléatoire réelle. On note :

$$\varphi_X : t \longmapsto \mathbb{E}[e^{itX}]$$

sa fonction caractéristique.

Remarque 35 : Si X admet une densité f, alors $\varphi_X(t) = \mathcal{F}[f](-t)$

Exemple 36 : Si $N \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $\varphi_N(t) = e^{itm} \exp\left(-\frac{t^2\sigma^2}{2}\right)$

Théorème 37 : La fonction caractéristique caractérise la loi de X.

Application 38 : Si $N_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $N_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ sont indépendantes, $N_1 + N_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1 + m_2, (\sigma_1 + \sigma_2)^2)$

Proposition 39 : Si X admet un moment d'ordre p, φ_X est p-fois dérivable en 0 et $\varphi_X^{(p)}(0) = i^p \mathbb{E}[X^p]$.

Application 40 (théorème des moments) : Soient X et Y deux variables aléatoires réelles admettant des moments de tout ordre. On suppose que leurs lois respectives sont à support compact et que $\mathbb{E}[X^p] = \mathbb{E}[Y^p]$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Alors X et Y ont même loi.

DVT1(2/2)

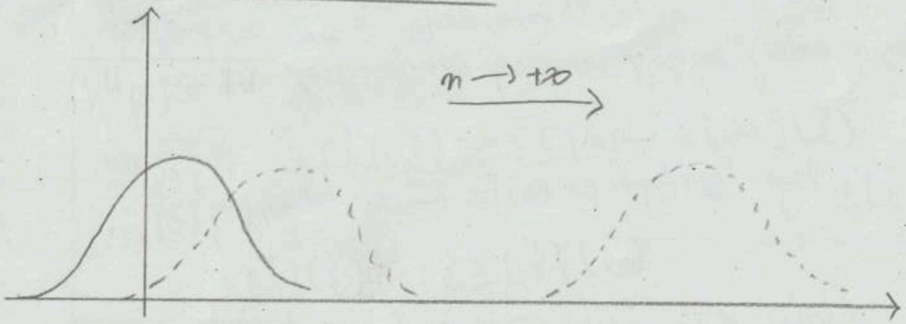
Théorème 41 (central limite) : Soient (X_n) des variables aléatoires i.i.d. et de carré intégrable. On note m leur espérance et σ^2 leur variance. Alors on a la convergence en loi :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - m}{\sigma}\right) \xrightarrow{(\mathcal{L})} \mathcal{N}(0, 1)$$

Intercalaire N° 3

Annexe

1) "Bosse glissante" :



2) Approximation de l'unité