Théorèmes de Mertens

Cortex

April 24, 2026

Présentation Les trois théorèmes de Mertens sont trois égalités asymptotiques donnant des informations sur la croissance des nombres premiers. Elle peuvent être utilisées afin de donner des estimations et des répartitions sur des suites intimement liées aux nombres premier, comme par exemple le théorème de Hardy-Ramanujan.

Remarques préliminaires La preuves ne présentent pas de difficultés particulières. Il ne dispose pas cependant de source viable. Il est important d'être très au clair sur les notations de Landau pour éviter de se décomposer le moment des justifications. Ce développement possède peu de recasage mais se combine très bien avec un autre développement : le théorème de Hardy-Ramanujan.

Notations

- Dans la suite, je note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et $\sum_{p\leq n} := \sum_{p\in\mathcal{P},\ p\leq n}$.
- Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ deux suites, je note

$$\exists C > 0, \forall n \geq 0,\ \ |u_n| \leq C\,|v_n| \ \ \Leftrightarrow\ \ u_n = \mathcal{O}(v_n)$$

Résultats admis Pour ce développement, on admet deux résultats afin de gagner du temps.

- $\log(n!) = n\log(n) + \mathcal{O}(n)$.
- Soient $n \geq 1$ et $p \in \mathcal{P}$, alors
$$\nu_p(n!) = \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$$
- Et de plus
$$\frac{n}{p} - 1 \leq \nu_p(n!) \leq \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}$$

Développement

Notons les trois fonctions qui vont nous intéresser.

$$\forall n \geq 1,\ \psi(n) := \sum_{p \leq n} \log(p) \tag{1}$$

$$\forall t \in \mathbf{R}_+,\ \phi(t) := \sum_{p \leq t} \frac{\log(p)}{p} \tag{2}$$

$$\forall n \geq 1,\ h(n) := \sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \tag{3}$$

Premier résultat La première étapes va être de prouver la comparaison suivante :

$$\psi(n) = \mathcal{O}(n)$$

Pour cela, on considère un entier $k \geq 0$. On a d'une l'inégalité suivante

$$\binom{2k}{k} \leq \sum_{l=0}^{2k} \binom{2k}{l} = 4^k$$

et d'autre part, tous les nombres premiers compris entre $k+1$ et $2k$ divisent $(k+1)\cdot(k+2)\cdots(2k) = \frac{(2k)!}{k!} = k!\binom{2k}{k}$, et aucun ne divise $1 \cdot 2 \cdots k = k!$, si bien que l'on peut écrire

$$\prod_{k<p\leq 2k} p \mid \binom{2k}{k}.$$

En combinant les deux résultats, il vient

$$\prod_{k<p\leq 2k} p \leq 4^k, \qquad \sum_{k<p\leq 2k} \log(p) \leq \log(4)k$$

A présent, fixons $n \geq 1$ et $N \geq 0$ avec $2^N \leq n < 2^{N+1}$. On a

$$\psi(n) = \sum_{p\leq n} \log(p) \leq \sum_{k=0}^{N} \left(\sum_{2^k<p\leq 2^{k+1}} \log(p) \right) \leq \sum_{k=0}^{N} \log(4)2^k = \log(4)(2^{N+1}-1) = \mathcal{O}(2^N) = \mathcal{O}(n)$$

Premier théorème de Mertens Pour la deuxième étapes, il sera démontré

$$\phi(t) = \log(t) + \mathcal{O}(1)$$

En utilisant la décomposition en facteurs premiers, on a l'égalité :

$$\log(n!) = \sum_{p\leq n} \log\left(p^{\nu_p(n!)}\right) = \sum_{p\leq n} \nu_p(n!)\log(p)$$

En utilisant la comparaison de $\log(n!)$ et les inégalités de $\nu_p(n!)$ admises, on obtient

$$n\sum_{p\leq n}\frac{\log(p)}{p} - \psi(n) \leq n\log(n) + \mathcal{O}(n) \leq n\sum_{p\leq n}\frac{\log(p)}{p} + n\sum_{p\leq n}\frac{\log(p)}{p(p-1)}$$

La série $\sum \frac{\log(n)}{n(n-1)}$ étant convergente, on simplifie l'inégalité comme suit

$$\phi(n) - \mathcal{O}(1) \leq \log(n) + \mathcal{O}(1) \leq \phi(n) + \mathcal{O}(1)$$

Comme $\mathcal{O}(1)$ est à comprendre comme "une fonction bornée", on trouve sans peine que $\phi(n) = \log(n) + b(n)$ avec $b:\ \mathbf{N}_{>0} \to \mathbf{R}$ bornée. Reste alors à obtenir le résultat pour $t \in \mathbf{R}_+$. Pour cela, on a

$$\phi(t) = \phi(\lfloor t \rfloor) = \log(t) + (\log(\lfloor t \rfloor) - \log(t)) + b(\lfloor t \rfloor) = \log(t) + \mathcal{O}(1)$$

Ce qui conclut.

Deuxième théorème de Mertens Pour le troisième théorème, il sera démontré

$$h(n) = C + \log\log(n) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log(n)}\right)$$

où $C \in \mathbf{R}$ est une constante (appelée constante de Meissel-Mertens).

On introduit la fonction suivante

$$f: \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbf{R}_+ \\ t & \mapsto & \frac{1}{t\log(t)^2} \end{array}$$

en remarquant que $\left(-\frac{1}{\log}\right)' = f$ et $(\log\log)' = \log \times f$. La suite de la preuve se base sur la remarque suivante :

$$\frac{1}{p} = \frac{\log(p)}{p}\frac{1}{\log(p)} = \frac{\log(p)}{p}\int_2^{+\infty} \mathbf{1}_{t>p} f(t)dt$$

Ainsi, pour $n \geq 2$, on a

$$h(n) = \int_2^{+\infty}\left(\sum_{p\leq n}\frac{\log(p)}{p}\mathbf{1}_{t>p}\right) f(t)dt$$

On divise l'intégral en deux parties. La première au-dessus de n et la seconde entre 2 et n. Pour la première partie, on obtient

$$\int_n^{+\infty}\left(\sum_{p\leq n}\frac{\log(p)}{p}\mathbf{1}_{t>p}\right) f(t)dt = \int_n^{+\infty}\phi(n)f(t)dt = (\log(n) + \mathcal{O}(1))\frac{1}{\log(n)} = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log(n)}\right)$$

Pour la seconde partie,

$$\begin{aligned}\int_2^{n}\left(\sum_{p\leq n}\frac{\log(p)}{p}\mathbf{1}_{t>p}\right) f(t)dt = \int_2^n \phi(t)f(t)dt &= \int_2^n (\log(t) + \mathcal{O}(1))f(t)dt \\ &= \log\log(n) + C' + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log(n)}\right)\end{aligned}$$

(cf. remarques sur f) En combinant les deux résultats, on conclut.

Remarques a posteriori

- Pour la culture, il existe un troisième théorème de Mertens :

$$\prod_{p\leq n}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{e^{-\gamma}}{\log(n)}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\log(n)}\right)\right).$$

- Pour les applications du deuxième théorème de Mertens, il y a le théorème de Hardy-Ramanujan : soit $n\geq 1$ un entier et $\nu(n):=\sum_{p|n}1$, alors pour toute suite $\omega:\ \mathbf{N}_{>0}\to\mathbf{R}$ tendant vers $+\infty$, on

$$\forall n,\forall_{\text{pp}}k\in\{1,\ldots,n\},\ \ |\nu(k)-\log\log(n)|\leq\omega(n)\sqrt{\log\log(n)}$$

où le $\forall_{\text{pp}}$ est à formellement comprendre comme suit : si $g(n)$ désigne le nombre d'entiers k plus petit que n ne satisfaisant pas l'inégalité, alors $g(n)/n\to 0$.

- Les démonstrations des résultats admis peuvent être exigées.

Références Il s'agit là d'un développement un peu maison. L'essentielle se trouve dans *Additive Combinatorics* de Terrence Tao et Van H. Vu. aux pages 46-47 dans la version *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*(trouvable sur internet). La preuve y est très mal détaillée (Et le livre n'est pas très répandu). J'ai donc couplé avec le *Algèbre et Géométrie* de Jean-Etienne Rombaldi, mais uniquement pour le premier théorème de Mertens.

Recasage Pour ce développement, on peut partir pour 121, 224, 230. On peut tenter 223 ; le rapport indiquant qu'on peut s'intéresser à des études asymptotiques sans se limiter au cas convergeant. Quand bien même, on peut justifier le développement par la constante de Meissel-Mertens.