218 : Formules de Taylor. Exemples et Applications.

I/ Les formules en dimension 1. [GOU] + [ROMB]

1) Résultats classiques des fonctions dérivables.

Théorème 1 : (Rolle) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue et dérivable sur $]a,b[$. Si $f(b) = f(a)$, il existe $c \in]a,b[$ tq $f'(c) = 0$.

Théorème 2 : (A-F) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$. $\exists c \in]a,b[$ tq $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Remarque 3 : être à valeurs dans $\mathbb{R}$ est important, par exemple $f : t \mapsto e^{it}$ vérifie $f(0) = f(2\pi)$ mais $f' \neq 0$ partout.

Théorème 4 : (IAF). Même hypothèses, avec f à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $\exists c \in]a,b[$, tel que $\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)\| (b-a)$.
- si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a $|f(b) - f(a)| \leq |b-a| \sup_{]a,b[} |f'(x)|$.

Exemple 5 : pour $x \in [0, 2\pi]$, $\sin x \leq x$.

2) Formules de Taylor 1D.

Théorème 6 : (Taylor - Lagrange). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^n$, et $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$. $\exists c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Remarque 7 : Le dernier terme est appelé reste de Lagrange, et pour démontrer la formule, on utilise Rolle sur une fonction bien choisie.

Corollaire 8 : Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (+m hypothèses qu'en haut), avec $f^{(n+1)}$ majorée par $M \geq 0$, on a

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(b-a)^k \right\| \leq \frac{M}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

Théorème 9 : (Taylor-Laplace). Si f est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n \, dt.$$

Remarque 10 : Bien qu'effrayante, cette formule se démontre aisément par récurrence.

Exemple 11 : $\forall x \geq 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

II/ Applications en dimension 1.

1) Développements limités

Théorème 12 : (Taylor-Young). Soit $n \in \mathbb{N}$, $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Soit $a \in I$ tq $f^{(n+1)}(a)$ existe.

On a si $h \to 0$: $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \cdots + \dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + o(h^{n+1})$.

Proposition 13 : Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, si il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ tel que au voisinage de 0,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

De plus, il est unique.

Proposition 14 : f est dérivable en $a \in I$ ssi f admet un DL_1 en a.

Contre exemple 15 : On pose $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Alors f admet un DL_2 en 0, mais n'est pas deux fois dérivable.

dev 1.

Exemple 16 : (quelques DL usuels). Lorsque $x \to 0$:

- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$.
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$.
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$.

Proposition 17 : Soient $f, g : \overset{\circ}{I} \to \mathbb{R}^n$ admettant chacunes un DL d'ordre n. Alors $f+g$, fg, f/g $(g \neq 0)$ admettent des DL_n, et de plus si g admet un DL_n en 0, et f admet un DL_n en $g(0)$, $f \circ g$ admet un DL_n.

Exemple 18 : (Méthode de Newton) Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$, on suppose $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour $x \in [c,d]$. On pose $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Alors $\exists ! a \in [c,d] \mid f(a) = 0$ et $\exists z \in [a,x]$ tq
$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = a + \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(z)}{f'(x)} (x-a)^2.$$

2) Application en probabilités : TCL

Définition 19 : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires, on dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X, noté $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si $\forall f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$.

Théorème 20 : (Lévy). $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \Phi_{X_n} \xrightarrow{CVS} \Phi_X$ où $\Phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$ la fonction caractéristique.

Théorème 21 : (TCL) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. iid $\in L^2(\Omega)$ pour $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace de probas. Alors $\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, où $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $m = \mathbb{E}[X_1]$, et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$.

Lemme 22 : Pour $X \in L^k(\Omega)$, Φ_X est de classe $\mathcal{C}^k$, et $\Phi_X^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}[X^k e^{itX}]$.

Application 23 : $A_n = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$. Alors $\lim_{n \to \infty} A_n = \frac{1}{2}$.

3) Suites définies par récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$.

Exemple 24 : On définit $(U_n)_n$, $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{U_n^\alpha}$. Alors $U_n \underset{n\to\infty}{\sim} [n(\alpha+1)]^{1/\alpha+1}$.

Exemple 25 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ admettant le DL $f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$ où $a > 0$ et $\alpha > 1$. On définit $U_{n+1} = f(U_n)$. Alors $U_n \underset{n\to\infty}{\sim} na(\alpha-1)^{1/\alpha-1}$.

- si $f = \ln(1+x)$, on a $U_n \sim \frac{2}{n}$.
- si $f = \sin$, on a $U_n \sim \sqrt{3/n}$

4) Séries entières, et inégalités de Kolmogorov.

Définition 26 : On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$

Théorème 27 : Soit f $\mathcal{C}^\infty$ sur $I \ni 0$, à valeurs réelles. Alors f est DSE en 0 si et seulement si, $\exists r > 0$ tq $]-r,r[\subseteq I$, et $(R_n)_n$ déf par $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ converge simplement vers 0 sur $]-r,r[$

Remarque 28 : Dans cette configuration, f admet donc le DSE $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, avec le rayon de convergence égal à r.

Théorème 29 : (Bernstein) Soit $a > 0$ et f $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-a,a[$. Si $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{(2k)} \geq 0$ alors f est DSE sur $]-a,a[$.

Lemme 30 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, avec f et $f^{(n+1)}$ bornées. Alors $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $f^{(k)}$ est bornée.

dev 2

Lemme 31 : Si f est $\mathcal{C}^2$, avec f et f'' bornées, alors
$$\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}$$

Théorème 32 : (Kolmogorov) Avec les hypothèses du lemme 30, on a $\forall k \in [\![1,n]\!]$
$$\|f^{(k)}\|_\infty \leq 2^{\frac{k(n+1-k)}{2}} \|f\|_\infty^{1-\frac{k}{n+1}} \|f^{(n+1)}\|_\infty^{k/n+1}.$$

III Taylor en dimension supérieure. [Rou]

1) Différentielles d'ordre supérieur.

Définition 33 : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable.
On rappelle que $Df : U \to (\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$, $x \mapsto D_x f$. Si Df est différentiable en $a \in U$, on dit que f est deux fois différentiable en a et on note $D^2_a f = D_a(Df)$.

Définition 34 : Pour f définie de la même manière, et $a \in U$, on pose $Hf(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j \in [\![1,n]\!]}$ la matrice hessienne de f en a.

Remarque 35 : Ainsi, on peut généraliser la différentielle à l'ordre n, $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Formules de Taylor :

On pose $D^k_a f(h)^k = D^k_a f(h, \dots, h)$.

Théorème 36 : Si f est k fois différentiable en $a \in U$, on a
$$f(a+h) = f(a) + D_a f(h) + \dots + \frac{1}{k!} D^k_a f(h)^k + o(\|h\|^k).$$

Théorème 37 : Si f est $\mathcal{C}^{k+1}$ sur U et $[a, a+h] \subseteq U$, on a
$$f(a+h) = f(a) + D_a f(h) + \dots + \frac{1}{k!} D^k_a f(h)^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1}_{a+th} f(h)^{k+1} \, dt.$$

Exemple 38 : si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$,
on a $f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(a) h, h \rangle + o(h^2)$.

Lemme 39 : (Hadamard) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, $f(0) = 0$.
$\exists g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$, $i \in [\![1,n]\!]$ tq $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n)$
- Si de plus $d_0 f = 0$, $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i x_j h_{i,j}(x_1, \dots, x_n)$ où $h_{i,j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$.

[Gou].

Théorème 40 : $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^2$, $\exists a \in U$ $d_a f = 0$,
$f(a+h) = f(a) + \frac{Q(h)}{2} + o(\|h\|^2)$ où $Q(h) = \sum_i h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) + 2 \sum_{i<j} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$
alors :
(i) si f admet un minimum en a, Q est une FQ positive.
(ii) Si Q est une FQ définie positive, f admet un minimum en a.

Exemple 41 : $Hf(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$,
- si $rt - s^2 > 0$, f admet un min en a ($r>0$) max si $r<0$)
- si $rt - s^2 < 0$, pas d'extremum en a.