157 : Matrices symétriques réelles / matrices hermitiennes.

I/ Généralités. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Définitions, premières propriétés.

Définition 1 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. A est dite symétrique (resp. antisymétrique) si ${}^tA = A$ (resp ${}^tA = -A$).

Proposition 2 : On note S_n (resp A_n) l'ensemble des matrices symétriques réelles (resp antisymétriques réelles). Ce sont des sev de dimension respectives $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$.

Définition 3 : Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. M est dite hermitienne lorsque ${}^t\overline{M} = M$.

Proposition 4 : Pour toute matrice hermitienne M, $\exists! (S,A) \in S_n \times A_n$ tel que $M = S + iA$.
De plus, l'ensemble des matrices hermitiennes forme un $\mathbb{R}$-ev de dimension n^2.

Définition 5 : Une matrice symétrique (resp hermitienne) A est dite positive si $\forall x \in \mathbb{R}$ (resp $\forall x \in \mathbb{C}$), ${}^tx A x \geq 0$ (resp. ${}^t\overline{x} A x \geq 0$). Définie positive si c'est > 0.

Exemple 6 : $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ est hermitienne.

2) Lien avec les formes quadratiques / hermitiennes.

Définition 7 : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $\varphi : E \times F \to \mathbb{K}$. φ est une forme bilinéaire si $\forall x \in E$, $\varphi(x, \cdot)$ est linéaire, et si $\forall y \in F$, $\varphi(\cdot, y)$ est linéaire.

Définition 8 : E et F deux $\mathbb{C}$-ev, $\varphi : E \times F \to \mathbb{C}$ est sesquilinéaire si $\forall x \in E$, $\varphi(x, \cdot)$ linéaire et $\forall y \in F$, $\varphi(\cdot, y)$ est antilinéaire (ie $\varphi(z + \lambda x, y) = \varphi(z,y) + \overline{\lambda}\varphi(x,y)$)

Définition/Proposition 9 : Si φ est une forme bilinéaire, que $E = F$, muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$, on pose $M = \varphi(e_i, e_j)_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$.
Alors si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$)
on a $\varphi(x,y) = {}^tX M Y$.
Dans le cas où φ est sesquilinéaire, et E un $\mathbb{C}$-ev, on a $\varphi(x,y) = {}^t\overline{X} M Y$.

Définition 10 : - Si φ est bilinéaire, elle est symétrique si $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$
- Si φ est sesquilinéaire, elle est dite hermitienne si $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$.

Remarque 11 : Il en est de même pour leurs matrices.

Définition 12 : On suppose $car(\mathbb{K}) \neq 2$. On appelle forme quadratique sur E toute application $q : E \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \varphi(x,x)$ où φ est bilinéaire symétrique.

Définition 13 : q sera dite hermitienne si E est un $\mathbb{C}$-ev et que φ est sesquilinéaire hermitienne.

Proposition 14 : Soit q une forme quadratique réelle. Il existe une unique forme bilinéaire φ, telle que $q(x) = \varphi(x,x)$ $\forall x \in E$.
On a $\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right)$.
φ est appelée forme polaire.

Proposition 15 : Toute forme quadratique q sur E est la donnée d'un morphisme $\Psi : E \to E^*$
$y \mapsto \varphi_y : x \mapsto \varphi(x,y)$ où
φ est la forme polaire.

Rq 16 : On définit ainsi $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(\Psi)$ et $rg(q) = rg(\Psi)$.

Proposition 17 : $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On pose P = la matrice de passage $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$. Si M est la matrice de q dans $\mathcal{B}$ et M' dans $\mathcal{B}'$, on a $M' = {}^tP M P$. (${}^t\bar{P} M P$ dans le cas hermitien).
Dans ce cas, M et M' sont dites congruentes.

Exemple 18 : $q(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$ est une forme quadratique de matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

II / Réduction et factorisation de matrices symétriques/hermitiennes

1) Endomorphismes autoadjoints. E = espace euclidien.

Proposition 19 : Soit E et $f \in \mathrm{End}(E)$. $\exists!\, f^* \in \mathrm{End}(E)$ tel que $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$ $\forall x,y \in E$.

Définition 20 : f est dit auto-adjoint si $f = f^*$.

Proposition 21 : Comme pour $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f$, on a ${}^tA = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f^*$, alors f est auto-adjoint ssi A est symétrique (où $\mathcal{B}$ est une b.o.n de E)

Rappel 22 : $\mathcal{B}$ est dite orthonormée, avec $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, si $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$.

Lemme 23 : Soit $A \in S_n$. $Sp(A) \subseteq \mathbb{R}$.

dev 1.

Théorème 24 : (Spectral) Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. De plus, la matrice de passage est orthogonale (${}^tP = P^{-1}$).

Contre-exemple 25 : $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est symétrique, mais $\chi_A = X^2$, donc $A^2 = 0$ et A n'est pas diagonalisable.

Théorème 26 : Soit $A \in S_n^+$. $\exists!\, B \in S_n^+$, $B^2 = A$.

2) Cas des formes quadratiques/hermitiennes.

Définition 27 : Soit q une forme quadratique, φ sa forme polaire. x et y sont orthogonaux selon φ si $\varphi(x,y) = 0$.

Théorème 28 : Si $\dim(E) < +\infty$, il existe une base φ-orthogonale.

Exemple 29 : En pratique, on utilise la méthode de Gauss pour écrire q comme une somme de carrés : par exemple
$q(x,y) = x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2$
$\Phi(x,y) = x\bar{y} + \bar{x}y = \frac{1}{2}\left(|x+y|^2 - |x-y|^2\right)$. ($\Phi$ hermitienne).

Théorème 30 : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $A^* = {}^t\bar{A} = A$. Il existe $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ tel que ${}^t\bar{P}AP = D$, D diagonale.

Théorème 31 : (Sylvester). Soit q une FQ sur E. Il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $q(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_{r+s}^2$, i.e. $Mat_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0 \end{pmatrix}$. (r,s) est appelé signature de q.

3) Autres factorisations.

Définition 32 : $A \in M_n(\mathbb{K})$, on pose $A_k = (a_{ij})_{1 \le i,j \le k}$, $\Delta_k = \det(A_k)$. Dits "déterminants principaux".

Théorème 33 : $A \in Gl_n(\mathbb{K})$ admet une décomposition $A = L \cdot U$ avec L triangulaire inf, et U triang. sup. et les coefs diag de L sont 1. ; ssi $\Delta_k \neq 0$ $\forall k \in [\![1,n]\!]$.

Théorème 34 : $A \in S_n^{++}$ (déf. >0) si et seulement si $\exists B$ triangulaire inf inversible telle que $A = B\,{}^tB$, de plus B est unique, et les coefs diag de B sont positifs. (Cholesky).

dev 2.

Théorème 35 : (Polaire) Soit $A \in Gl_n(\mathbb{R})$. $\exists!\ (O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}$ tels que $A = O \cdot S$.

Exemple 36 : (oubli) Soit $q(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + xz + yz$. Avec l'algo de Gauss on a $q(x,y,z) = \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 - 2\left(y - \frac{z}{4}\right)^2 - \frac{z^2}{8}$, donc de signature $(1,2)$. $\exists \mathcal{B}$ base, telle que $Mat_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$.

III / Application : Covariance.

Définition 37 : Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On appelle matrice de covariance de X $\Gamma := (Cov(X_i, X_j))_{i,j \in [\![1,n]\!]}$. (et $\mathbb{E}[X_i^2] < +\infty$).

Proposition 38 : $\Gamma = Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$, où $\mathcal{B}$ base canonique de $\mathbb{R}^n$, et $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto Cov(\langle X,a \rangle, \langle X,b \rangle)$. En particulier, $\Gamma \in S_n^+$.

Déf 39 : Un vecteur aléatoire $X \in \mathbb{R}^d$ est dit gaussien si $\forall a \in \mathbb{R}^d$, $\langle X,a \rangle \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, avec m et σ^2 à déterminer.

Proposition 40 : Soit X vecteur gaussien d'espérance $m_X = (\mathbb{E}[X_i])_{i=1,\dots,d}$ et de matrice de covariance C_X. Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$, et $b \in \mathbb{R}^d$. Posons $Y = AX + b$. Alors Y est gaussien, et $C_Y = A C_X {}^tA$.

Théorème 41 : Soit $C \in S_n^+$, soit $m \in \mathbb{R}^d$. Il existe un vecteur gaussien de matrice de covariance C et moyenne m.

Exemple 42 : Soient $X_1, \dots, X_d$ des v.a. gaussiennes indép. $X = (X_1, \dots, X_d)$ est un vecteur gaussien.

Théorème 43 : Soit $C \in S_n^{++}$ et $m \in \mathbb{R}^d$. La loi (sur $\mathbb{R}^d$) $\mathcal{N}(m, C)$ a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue
$$f_{m,C}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det C}} \exp\left(-\frac{1}{2}\langle C^{-1}(y-m), y-m \rangle\right).$$