Leçons : 106, 108, 162

(Ber) Algèbre : le grand combat, Berhuy

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

Générateurs de $SL_n(\mathbb{K})$ et de $GL_n(\mathbb{K})$, application à la connexité de $SL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{C})$

Thm: (Ber, IV.5 prop. 5.8 p.81)

* $SL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections.
* $GL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les dilatations et les transvections

Plus précisément : Toute matrice inversible est produit de transvections et d'<u>au plus</u> une dilatation.

Démo: (1) On procède par récurrence sur $n \geq 1$

→ Si <u>$n = 1$</u>, alors $SL_1(\mathbb{K}) = \{1\}$ et 1 est une transvection

→ Soit <u>$n > 1$</u>, on suppose que $SL_{n-1}(\mathbb{K}) = \langle \{\text{Transvections}\} \rangle_{Gp}$

Soit $M \in SL_n(\mathbb{K})$, on note $M = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, comme M est inversible $L_1 \neq 0$,[1] il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_{1j} \neq 0$

OPS : $\star$ $a_{11} \neq 0$ quitte à considérer $MT_{1j}(1)$ au lieu de M $(C_1 \leftarrow C_1 + C_j)$

$\star$ $a_{21} \neq 0$ quitte à considérer $T_{21}(1)M$ au lieu de M. $(L_2 \leftarrow L_2 + L_1)$

$\star$ $a_{11} = 1$ quitte à considérer $T_{12}\left(\frac{1-a_{11}}{a_{21}}\right)M$ au lieu de M $(L_1 \leftarrow L_1 + \left(\frac{1-a_{11}}{a_{21}}\right)L_2)$

D'où $M = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \star \\ \hline \star & \star \end{array}\right)$. Par le pivot de Gauss on échelonne M, en une matrice

$$\tilde{M} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & N \end{array}\right) \quad \text{avec } N \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$$

ainsi il existe $S_1, \dots, S_m, S_{m+1}, \dots, S_{m+p}$ des transvections tel que $S_1 \cdots S_m M S_{m+1} \cdots S_{m+p} = \tilde{M}$, comme $\det S_i = 1$ pour $i = 1, \dots, m+p$ on a

$$\det \tilde{M} = \det M = 1$$

Donc $\det N = 1$, par <u>hypothèse de récurrence</u> il existe $R_1, \dots, R_k$ des transvections tel que $N = R_1 \cdots R_k$. On pose $T_i = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R_i \end{array}\right)$ pour $i = 1, \dots, k$. qui est une transvection, par un produit par blocs on a : $T_1 \cdots T_k = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & N \end{array}\right) = \tilde{M}$ donc

$$S_1 \cdots S_m M S_{m+1} \cdots S_{m+p} = T_1 \cdots T_k$$

Comme S_i sont inversibles[2] et que S_i^{-1} est une transvection on a :

$$\boxed{M = S_m^{-1} \cdots S_1^{-1} T_1 \cdots T_k S_{m+p}^{-1} \cdots S_{m+1}^{-1}}$$

D'où le résultat

$\left(L_1 \leftarrow \frac{1}{\det M} L_1\right)$

② Soit $M \in GL_n(\mathbb{K}) \setminus SL_n(\mathbb{K})$ alors $D_1\left(\frac{1}{\det M}\right) M \in SL_n(\mathbb{K})$ comme $D_1\left(\frac{1}{\det M}\right)$ est inversible d'inverse $D_1(\det M)$ on applique ① à $D_1\left(\frac{1}{\det M}\right)M$ ainsi il existe $T_1, \dots, T_r$ des transvections tel que

$$D_1\left(\frac{1}{\det M}\right) M = T_1 \cdots T_r$$

D'où $\boxed{M = D_1(\det M)\, T_1 \cdots T_r.}$ ▨

Appli: $SL_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Démo: Soit $M \in SL_n(\mathbb{K})$, il existe $T_1(\lambda_1), \dots, T_r(\lambda_r)$ (3) des transvections tel que $M = T_1(\lambda_1)\cdots T_r(\lambda_r)$
Alors
$$\gamma : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & SL_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & T_1((1-t)\lambda_1) \cdots T_r((1-t)\lambda_r) \end{array}$$
est un chemin qui relie M à I_n. D'où $SL_n(\mathbb{K})$ est étoilé par rapport à I_n donc connexe par arcs. ▨

---

(1) Si $L_1 = 0$ alors $M = \begin{pmatrix} 0 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$ donc $\det M = 0$ donc $M \notin GL_n(\mathbb{K})$

(2) $T_{ij}(\lambda) T_{ij}(-\lambda) = (I_n + \lambda E_{ij})(I_n - \lambda E_{ij}) = I_n + \lambda E_{ij} - \lambda E_{ij} - \lambda^2 E_{ij}^2$
$= I_n$ car $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$ et $i \neq j$

(3) $T_k(\lambda_k)$ pour $k \in [\![1, r]\!]$ est de la forme $T_k(\lambda_k) = T_{i_k j_k}(\lambda_k)$ où $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, $i \neq j$

Ndt: $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1) E_{ii}$ pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$

Ex:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= T_{23}(1)\, T_{32}(1)\, T_{13}(2)\, T_{31}(2)\, T_{21}(1)\, T_{12}(1) \in SL_3(\mathbb{R})$$