

HOLOMORPHIE SOUS L'INTÉGRALE ET PROBLÈME DES MOMENTS

- 235, 239, 245, 261 -

Dans ce développement, on va mêler analyse complexe et probabilités pour répondre dans un cas particulier au problème des moments, qui consiste à savoir si une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ est caractérisée par ses moments. On va commencer par démontrer le théorème d'holomorphie sous l'intégrale qu'on utilisera pour étudier les fonctions caractéristiques des lois à support compact.

Holomorphie sous l'intégrale

La première étape de notre développement consiste à démontrer le théorème suivant :

Théorème 1 (Holomorphie sous l'intégrale). *Soit $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace mesuré σ -fini, et soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On considère $f : X \times U \rightarrow \mathbb{C}$ un noyau satisfaisant les conditions suivantes :*

1. $\forall z \in U, f(-, z) \in L^1(\mu)$
2. $\forall x \in X, f(x, -) \in \mathcal{H}(U)$
3. $\forall K \subset U$ compact, $\exists g_K \in L^1(\mu) : \forall (x, z) \in X \times K, |f(x, z)| \leq g_K(x)$

Alors la fonction :

$$F : z \mapsto \int_X f(x, z) d\mu(x) \quad (1)$$

est définie et holomorphe sur U . De plus, on peut intervertir la dérivation et l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in U, F^{(n)}(z) = \int_X \partial_z^n f(x, z) d\mu(x) \quad (2)$$

Remarque : Le cadre de travail est à la fois large et restreint. On énonce fréquemment ce théorème en remplaçant l'espace mesuré $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ par $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue, et c'est effectivement le cadre le plus fréquent d'utilisation. Mais dans la suite du développement, on va vouloir l'utiliser pour des intégrales contre des mesures, sur $\mathbb{R}$ certes, mais beaucoup plus louches que la mesure de Lebesgue, d'où la nécessité de travailler dans un cadre un peu élargi. MAIS le théorème d'holomorphie sous l'intégrale reste vrai en retirant l'hypothèse de σ -finitude sur X . La démonstration que je vais proposer nécessite le caractère σ -fini car on va se servir du théorème de Fubini. La démonstration générale n'est pas beaucoup plus difficile, mais celle que je propose utilise beaucoup plus d'outils d'analyse complexe, c'est donc celle que j'ai préféré développer. ♦

Démonstration. Remarquons tout d'abord que F est définie sur U en vertu de l'hypothèse 1.

Notre démonstration va utiliser le critère de Morera pour caractériser les fonctions holomorphes : F est holomorphe sur U si, et seulement si, elle est continue et son intégrale sur le bord de tout triangle plein contenu dans U est nulle.

Continuité de F : pas de mystère ici, on utilise le théorème de continuité sous le signe intégrale, dont les hypothèses sont strictement moins fortes que celles qu'on a faites sur f . Il s'applique donc sans rajouter quoi que ce soit et F est continue.

Intégrale sur le bord des triangles : Soit $T \subset U$ un triangle plein inclus dans U ⁽ⁱ⁾. On va commencer par montrer que F est intégrable sur ∂T . Remarquons que F étant continue, elle est intégrable sur ∂T , qui est un compact de U . On a :

$$\int_{\partial T} F(z) = \int_{\partial T} \int_X f(x, z) d\mu(x) dz = \int_0^1 \int_X f(x, \gamma(t)) \gamma'(t) d\mu(x) dt \quad (3)$$

où $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ est une paramétrisation continue et C^1 par morceaux de ∂T . Passons donc au module sous les deux intégrales **dans la dernière expression**⁽ⁱⁱ⁾ :

$$\int_0^1 \int_X |f(x, \gamma(t)) \gamma'(t)| d\mu(x) dt \leq \int_0^1 \int_X g_T(x) |\gamma'(t)| d\mu(x) dt \leq \|g_T\|_1 L(\gamma) < +\infty \quad (4)$$

avec $L(\gamma)$ la longueur de l'arc γ . Ainsi, $(x, t) \mapsto f(x, \gamma(t)) \gamma'(t)$ est intégrable sur $X \times [0, 1]$ et on peut utiliser le théorème de Fubini :

$$\int_{\partial T} F(z) dz = \int_X \underbrace{\int_{\partial T} f(x, z) dz}_{=0} d\mu(x) = 0 \quad (5)$$

car $f(x, -)$ est holomorphe

Par le lemme de Morera, F est holomorphe sur U .

On va utiliser la formule de Cauchy pour montrer que la dérivation commute avec l'intégrale. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $z_0 \in U$ et soit $r > 0$ tel que $\bar{B}(z_0, r) \subset U$. Comme F est holomorphe sur U

$$F^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{F(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (6)$$

$$= \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial B(0, r)} \int_X \frac{f(x, z)}{(z - z_0)^{n+1}} d\mu(x) dz \quad (7)$$

$$= \int_X \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial B(0, r)} \frac{f(x, z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz d\mu(x) \quad (8)$$

$$= \int_X \partial_z^n f(x, z) d\mu(x) \quad (9)$$

en appliquant une nouvelle fois le théorème de Fubini (la démonstration est identique que celle déjà faite plus haut) et en utilisant encore le fait que $f(x, -)$ est holomorphe pour tout x . $\square$

(i). Attention, l'intérieur du triangle doit être inclus dans U , sinon l'intégrale sur son bord peut ne pas faire 0.

(ii). Attention à ne pas se précipiter et à calculer $\int_{\partial T} \int_X |f(x, z)| d\mu(x) dz$, car la mesure dz est une mesure complexe ! Il faut d'abord faire apparaître une paramétrisation γ pour intégrer contre une mesure positive.

Le problème des moments

On va maintenant relier des propriétés d'holomorphic au problème des moments en probabilités :

Application 2. (Problème des moments : support compact) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles dont les lois respectives sont à support compact⁽ⁱⁱⁱ⁾. On suppose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}[X^n] = \mathbb{E}[Y^n] \quad (10)$$

Alors X et Y ont même loi.

Pour cela, on va travailler sur les fonctions caractéristiques en montrant le lemme suivant :

Lemme 3. Soit μ une mesure de probabilité à support compact sur $\mathbb{R}$. L'application :

$$\varphi : z \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{izx} d\mu(x) \quad (11)$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Démonstration. Tout d'abord, notons que μ étant une mesure finie, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ est un espace mesuré σ -fini. Soit $R > 0$. Pour z de module au plus R , on a :

$$|e^{izx}| = e^{-x \operatorname{Im}(z)} \leq e^{xR} \quad (12)$$

Or la fonction $x \mapsto e^{xR}$ est intégrable contre μ car μ est à support compact. Comme c'est vrai pour tout R et que $z \mapsto e^{izx}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, le théorème d'holomorphic sous l'intégrale indique que φ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. $\square$

On est alors en mesure de démontrer l'application : par le lemme, les fonctions caractéristiques de X et Y se prolongent sur $\mathbb{C}$ en deux fonctions entières. Donc :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \varphi_X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi_X^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad (13)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} i^n \frac{\mathbb{E}[X^n]}{n!} z^n \quad (14)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} i^n \frac{\mathbb{E}[Y^n]}{n!} z^n \quad (15)$$

$$= \varphi_Y(z) \quad (16)$$

Ainsi, X et Y ont mêmes fonctions caractéristiques : puisque celle-ci caractérisent la loi, elles ont même loi !

Remarque : De façon plus générale, on peut montrer qu'il suffit que la fonction caractéristique soit développable en série entière au voisinage de 0 pour qu'elles le soient au voisinage de tout réel (cf le

(iii). Cette hypothèse implique que X et Y admettent des moments à tout ordre.

poly de Clémentine), et donc il existe un prolongement holomorphe des fonctions caractéristiques à un voisinage de $\mathbb{R}$. Dans ce cas, le fait que X et Y aient les mêmes moments implique qu'elles coïncident sur un voisinage de 0, et donc sur tout un voisinage de $\mathbb{R}$ par connexité. $\blacklozenge$