

## 203. UTILISATION DE LA NOTION DE COMPACITÉ

$(X, d)$  et  $(Y, d')$  désignent des espaces métriques, que l'on notera plus simplement  $X$  et  $Y$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la distance.

$\mathbf{K}$  désigne  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ .

### 1. Définitions de la compacité.

#### 1.1. Propriété de Borel-Lebesgue

**Définition 1.** On dit que  $X$  est **compact** si de tout recouvrement de  $X$  par des ouverts de  $X$ , on peut en extraire un sous-recouvrement fini.

**Exemple 2.**

- ★ Tout espace métrique fini est compact.
- ★  $\mathbf{R}$  n'est pas compact.
- ★ Soit  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in X^{\mathbf{N}}$  qui converge vers  $\ell$ . Alors  $\Gamma = \{x_n ; n \in \mathbf{N}\} \cup \{\ell\}$  est compact.

**Proposition 3.** Un compact est borné.

**Proposition 4.**  $X$  est compact ssi de toute intersection vide de fermés de  $X$ , on peut en extraire une sous-famille finie de fermés d'intersection vide.

**Corollaire 5.** Si  $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite décroissante de fermés non vides dans un compact  $X$ , alors  $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} F_n \neq \emptyset$ .

**Proposition 6.** Une réunion finie de parties compactes de  $X$  est compacte.

**Proposition 7.** Une intersection de parties compactes de  $X$  est compacte.

**Proposition 8.** Un produit fini de compacts est compact.

#### 1.2. Propriété de Bolzano-Weierstraß

**Définition 9.** On dit que  $X$  est **séquentiellement compact** si toute suite d'éléments de  $X$  admet une valeur d'adhérence dans  $X$ .

**Théorème 10.** Un espace métrique est compact ssi il est séquentiellement compact.

**Exemple 11.** Les segments de  $\mathbf{R}$  sont compacts.

**Proposition 12.**

1. Si  $X$  est compact et  $A \subseteq X$  est fermé, alors  $A$  est compact.
2. Si  $A \subseteq X$  est compact, alors  $A$  est fermé et borné.
3. Si  $X$  est compact, alors  $X$  est complet.

**Théorème 13.** Si  $X$  est compact, alors  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in X^{\mathbf{N}}$  converge ssi elle admet une unique valeur d'adhérence.

### 2. Compacité et application continues

#### 2.1. Extrema

**Proposition 14.** L'image d'un compact par une application continue est compacte.

**Remarque 15.** La compacité de l'ensemble de départ est essentielle, contre-exemple :  $\arctan ]-\pi/2, \pi/2[ = \mathbf{R}$  qui n'est pas compact.

Le résultat est faux pour l'image réciproque, contre-exemple : si  $f$  est la fonction nulle sur  $\mathbf{R}$ , alors  $f^{-1}(\{0\}) = \mathbf{R}$  qui n'est pas compact.

**Corollaire 16.** Supposons  $X$  compact. Soit  $f : X \rightarrow Y$  continue et bijective. Alors  $f^{-1}$  est continue.

**Théorème 17 : des bornes.** Soit  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  continue. Si  $X$  est compact, alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes.

**Corollaire 18.** Soit  $x \in X$  et  $K \subseteq X$  compact. Alors la distance de  $x$  à  $K$  est atteinte.

**Corollaire 19.** La distance entre deux parties compactes est atteinte.

**Théorème 20 : Rolle.** Soient  $a < b$  des réels et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  continue. On suppose de plus que  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$  et  $f(a) = f(b)$ . Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Application 21 : Égalité des accroissements finis.** Soit  $f$  vérifiant les hypothèses du point précédent, à l'exception de  $f(a) = f(b)$ . Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

**Corollaire 22.** Soit  $f$  vérifiant les mêmes hypothèses. Alors  $f$  est croissante ssi  $f'$  est positive sur  $]a, b[$ .

## 2.2. Uniformité

**Définition.** On dit que  $f : X \rightarrow Y$  est **uniformément continue** si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (x, y) \in X^2 \quad d(x, y) \leq \delta \implies d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

**Exemple 23.**  $x \mapsto x^2$  est continue sur  $\mathbf{R}$  mais n'est pas uniformément continue.

**Théorème 24 : Heine.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  continue. Si  $X$  est compact, alors  $f$  est uniformément continue.

**Application 25.** Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  continue et périodique. Alors  $f$  est uniformément continue.

**Application 26.** Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  continue qui admet des limites finies en  $-\infty$  et  $+\infty$ . Alors  $f$  est uniformément continue.

**Théorème 27 : Dini. [DEV 1]** Soit  $a < b$  des réels.

1. Soit  $(f_n)$  une suite croissante d'applications réelles définies et continues sur  $[a, b]$ . Si  $(f_n)$  converge simplement vers une application continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , alors la convergence est uniforme.
2. Soit  $(f_n)$  une suite d'applications réelles croissantes, définies et continues sur  $[a, b]$ . Si  $(f_n)$  converge simplement vers une application continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , alors la convergence est uniforme.

**Application 28.** Soit  $(f_n)$  la suite de fonctions définie pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  par  $f_n : x \in \mathbf{R} \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ . Alors  $(f_n)$  converge uniformément sur tout segment de  $\mathbf{R}$  vers  $\exp$ .

**Définition 29.** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  une application continue. Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on appelle  **$n$ -ième polynôme de Bernstein** associé à  $f$  le polynôme :

$$B_n(f)(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1 - X)^{n-k}.$$

**Théorème 30.** La suite de fonctions polynômiales  $(B_n(f))_{n \in \mathbf{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .

**Application 31 : Théorème de Weierstraß.** Soient  $a > b$  des réels et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  continue. Alors  $f$  est limite uniforme sur  $[a, b]$  d'une suite de fonctions polynômiales.

**Application 32.** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  continue telle que  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $\int_0^1 f(t) t^n dt = 0$ . Alors  $f = 0$ .

## 2.3. Théorèmes de point fixe.

**Théorème 33.** On suppose  $X$  compact. Soit  $f : X \rightarrow X$  telle que :

$$\forall (x, y) \in X \quad x \neq y \implies d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Alors  $f$  admet un unique point fixe.

**Remarque 34.** Le résultat est faux si  $X$  est uniquement complet. Contre-exemple :  $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x + \frac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  définie sur  $\mathbf{R}$ .

**Théorème 35.** Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel normé,  $K \subseteq E$  un compact convexe et  $f : K \rightarrow K$  une application 1-lipschitzienne. Alors  $f$  admet (au moins) un point fixe.

### 3. Compacité dans les espaces vectoriels normés de dimension finie.

On considère  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie.

**Proposition 36.** Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Les compacts de  $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$  sont les fermés bornés.

**Théorème 37. [DEV 2]** Toutes les normes sont équivalentes dans un espace vectoriel normé de dimension finie.

**Remarque 38.** Le résultat est faux en dimension infinie.

Contre-exemple : la suite de fonctions  $f_n : x \in [0, 1] \mapsto \max(1 - nx, 0)$  tend vers 0 pour la norme  $\|\cdot\|_1$  et vers 1 pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Corollaire 39.** Soit  $F$  un espace vectoriel normé de dimension quelconque et  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire. Alors  $f$  est continue.

Soit  $k \in \mathbf{N}^*$  et  $f : E^k \rightarrow F$  une application  $k$ -linéaire. Alors  $f$  est continue.

**Exemple 40.** Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . L'application  $\det : (\mathbf{K}^n)^n \rightarrow \mathbf{K}$  est continue.

**Remarque 41.** Le résultat est faux en dimension infinie.

Contre-exemple :  $P \in \mathbf{R}[X] \mapsto P'$  est linéaire mais n'est pas continue pour la norme du sup (en valeur absolue) des coefficients.

**Corollaire 42.** Les parties compactes de  $E$  sont exactement ses parties fermées et bornées.

**Exemple 43.** Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ .  $\mathcal{O}_n(\mathbf{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid A^\top A = I_n\}$  est compact.

**Remarque 44.** Le résultat est faux en dimension infinie.

Contre-exemple : si  $E = \mathbf{R}[X]$  muni de la norme du sup (en valeur absolue) des coefficients, alors la boule unité fermée est fermée-bornée et pourtant, la suite  $(X^n)_{n \in \mathbf{N}}$ , à valeurs dans cette boule, n'admet pas de valeur d'adhérence car  $\|X_n - X_m\| = 1, \forall n \neq m$ .

**Théorème 45 : Riesz. [DEV 2]** Un espace vectoriel normé est de dimension finie ssi sa boule unité fermée est compacte.

**Exemple 46.** On retrouve que  $\mathbf{R}[X]$  est de dimension infinie.

**Application 47.** Dans un espace vectoriel normé de dimension infinie, tout compact est d'intérieur vide.

**Exemple 48.** Un exemple de compact en dimension infinie.

Soit  $\ell^2 = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 < +\infty \right\}$  qui est un espace vectoriel

de dimension infinie. On le munit de la norme  $\|(u_n)_{n \in \mathbf{N}}\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}$ .

L'ensemble suivant est un compact de  $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$  :

$$A = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^2 \mid \forall n \in \mathbf{N} \quad |u_n| \leq \frac{1}{n+1} \right\}$$