

THÉORÈME DE LIAPOUNOV

- 204, 215, 220, 221 –

L'objectif de notre développement est de démontrer une partie du théorème de linéarisation de Liapounov, qui permet d'étudier les points d'équilibre d'un système différentiel autonome en «linéarisant» le système au point d'équilibre, ce qui consiste à remplacer le champ de vecteur par sa différentielle en l'équilibre. C'est un intéressant résultat d'équa diff, qui se recase dans les deux leçons 220 et 221, tout en utilisant d'intéressants résultats d'algèbre linéaire, particulièrement en lien avec les exponentielles de matrices, et de connexité. Notez que les preuves qu'on trouve généralement dans les livres d'équations différentielles procèdent différemment. L'argument de connexité apparaît dans [1], livre que je trouve personnellement atroce, mais eh, le recasage en vaut la peine.

On considère d un entier, U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ contenant 0 et f un champ de vecteur sur U , de classe C^1 , s'annulant en 0. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le système différentiel :

$$y' = f(y) \quad (\star)$$

admet une unique solution maximale issue de n'importe quel point de U . Pour alléger les notations, nous noterons A la matrice jacobienne de f en 0, c'est-à-dire la matrice dans la base canonique de l'application linéaire $df(0)$. On va montrer le résultat suivant :

Théorème 1 (Liapounov ([1], chap X, th IV.1)). *On suppose que la matrice A a toutes ses valeurs propres (complexes) de partie réelle strictement négative. Alors le point d'équilibre 0 est asymptotiquement stable.*

Un lemme d'algèbre linéaire

Lemme 2. *Soit $M \in \mathbb{M}_d(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $\mu > 0$ tel que :*

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(M), \quad \Re(\lambda) < -\mu \quad (1)$$

Alors il existe une constante C_μ telle que :

$$\forall t \geq 0, \quad |||\exp(tM)||| \leq C_\mu e^{-t\mu} \quad (2)$$

Démonstration. Par équivalence des normes en dimension finie, on peut travailler avec la norme infinie. Toute la démonstration repose sur une utilisation astucieuse du lemme des noyaux. Consi-

dérons le polynôme caractéristique χ_M de M qu'on écrit sous forme factorisée :

$$\chi_M = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \quad (3)$$

Par le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux, on obtient la décomposition de $\mathbb{R}^d$ en somme des espaces caractéristiques de M :

$$\mathbb{R}^d = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}((\lambda_i I_d - M)^{\alpha_i}) \quad (4)$$

Soit $x \in \mathbb{R}^d$. x admet une unique décomposition $x = x_1 + \dots + x_p$ avec $x_i \in \text{Ker}((\lambda_i I_d - M)^{\alpha_i})$. Ainsi, on a :

$$\exp(tM) \cdot x = \sum_{i=1}^p \exp(t(\lambda_i M - \lambda_i I_d + \lambda_i I_d)) \cdot x_i \quad (5)$$

$$= \sum_{i=1}^p \sum_{n=0}^{\alpha_i-1} t^n e^{\lambda_i t} \frac{(M - \lambda_i I_d)^n}{n!} \cdot x_i \quad (6)$$

Or, comme $\lambda_i < -\mu$, on a $t^n e^{\lambda_i t} = O_{t \rightarrow +\infty}(e^{-\mu t})$, ce pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall n \leq \max_{0 \leq i \leq d} \alpha_i, t^n e^{\lambda_i t} \leq C e^{-\mu t} \quad (7)$$

Il vient donc :

$$\|\exp(tM) \cdot x\|_\infty \leq C e^{-t\mu} \sum_{i=1}^p \sum_{n=0}^{\alpha_i-1} \frac{\|M - \lambda_i I_d\|^n}{n!} \|x_i\|_\infty \quad (8)$$

$$\leq \|x\|_\infty \times e^{-t\mu} \times \underbrace{C \sum_{i=1}^p \sum_{n=0}^{\alpha_i-1} \frac{\|M - \lambda_i I_d\|^n}{n!}}_{=: C_\mu} \quad (9)$$

Comme ceci vaut pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on trouve bien le résultat souhaité. $\square$

Le théorème de Liapounov

Ce lemme en poche, on va démontrer le théorème de Liapounov. Pour cela, il y a deux choses à faire : montrer que les solutions partant d'un point au voisinage de l'équilibre sont globales, et qu'elles tendent vers 0 à l'infini. Faisons d'une pierre de coup en démontrant le lemme suivant qui contient tout ce qu'il faut pour conclure :

Lemme 3. Soit $\mu_0 > 0$ tel que pour toute valeur propre λ de A , $\Re(\lambda) < \mu_0$. Alors :

$$\forall 0 < \mu < \mu_0, \forall C > 0, \exists 0 < \eta < C : \forall \|x_0\| \leq \eta, \forall t \in [0, T^*[, \|x(t)\| \leq C e^{-\mu t} \quad (10)$$

avec x la solution maximale issue de x_0 et T^* le supremum de son intervalle de définition.

Remarque : Vous le sentez, cette démonstration va être lourde en notations, avec des paramètres dans tous les sens qui dépendent les uns des autres. Accrochez-vous, et si besoin est, n'hésitez pas à marquer explicitement les dépendances des paramètres introduits ! $\blacklozenge$

Démonstration. On va travailler sur le lien entre notre système différentiel et le système linéarisé. On considère le développement limité de f en 0 :

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, f(y) = f(0) + df(0) \cdot y + g(y) = A \cdot y + g(y) \quad (\star)$$

avec $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction telle que :

$$\frac{g(y)}{\|y\|} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 \quad (11)$$

Il existe un seuil $\delta > 0$ tel que :

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \|y\| \leq \delta \implies \|g(y)\| \leq \|y\| \quad (12)$$

Soient $0 < C < \delta^{(i)}$ et $0 < \mu < \mu_0$. Soit $\|x_0\| < C$, notons x la solution issue de $x_0^{(ii)}$ et posons T^* le supremum de l'intervalle de définition de x . On considère alors l'ensemble :

$$\mathcal{F} := \{t \in [0, T^*[\mid x(t) \leq C e^{-\mu t}\} \quad (13)$$

Par continuité de x et de l'exponentielle, $\mathcal{F}$ est un fermé de $[0, T^*[^{(iii)}$. Le choix de $\|x_0\|$ implique que $0 \in \mathcal{F}$. Ainsi, on peut considérer $\mathcal{E}$ la composante connexe de $\mathcal{F}$ contenant 0. C'est un intervalle (car connexe dans $\mathbb{R}$) fermé dans $\mathcal{F}$ (mais pas nécessairement fermé dans $\mathbb{R}$) car les composantes connexes d'un espace métrique sont toujours fermées dans cet espace. Comme $\mathcal{F}$ est fermé dans $[0, T^*[$, $\mathcal{E}$ est fermé dans $[0, T^*[$. Si on montre que c'est également un ouvert de $[0, T^*[$, on obtiendra :

$$\mathcal{E} = [0, T^*[\quad (14)$$

par connexité de $[0, T^*[$.

Le développement limité $(\star)$ de f montre que x est également solution du système différentiel **linéaire** avec second membre :

$$y'(t) - A \cdot y(t) = g(x(t)) \quad (15)$$

et donc on peut appliquer la formule de Duhamel :

$$\forall t \in \mathcal{E}, x(t) = \exp(tA) \cdot x_0 + \int_0^t \exp((t-s)A) \cdot g(x(s)) ds \quad (16)$$

Une petite inégalité triangulaire ainsi qu'une application du lemme 2 fournit :

$$\forall t \in \mathcal{E}, \|x(t)\| \leq C_{\mu_0} e^{-\mu_0 t} \|x_0\| + \int_0^t C_{\mu_0} e^{-\mu_0(t-s)} \|g(x(s))\| ds \quad (17)$$

(i). On va montrer le lemme pour toute telle constante C , la majoration de $\|x\|$ pour des constantes C plus grandes étant alors immédiate.

(ii). Attention, x_0 est amené à changer au cours de la démonstration. Pour épurer les notations déjà très lourdes, j'ai choisi de ne pas écrire explicitement la dépendance de x et x_0 , mais il faut bien avoir conscience de ce qui en dépend, et de ce qui n'en dépend pas.

(iii). J'insiste : ça n'est pas nécessairement un fermé de $\mathbb{R}$. On va devoir faire joujou avec de la topologie relative, donc ce genre de distinction est importante.

Or, pour tout $t \in \mathcal{E}$, on a $\|x(t)\| \leq C \leq \delta$, donc $\|g(x(t))\| \leq \|x(t)\|$ et :

$$\forall t \in \mathcal{E}, \|x(t)\| \leq C_{\mu_0} e^{-\mu_0 t} \|x_0\| + \int_0^t C_{\mu_0} e^{-\mu_0(t-s)} \|x(s)\| ds \quad (18)$$

Notons :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{E} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ t &\mapsto \|x(t)\| e^{\mu_0 t} \end{aligned} \quad (19)$$

En multipliant l'inégalité précédente par $e^{\mu_0 t}$, il vient l'inégalité intégrale :

$$\forall t \in \mathcal{E}, \varphi(t) \leq C_{\mu_0} \|x_0\| + \int_0^t C_{\mu_0} \varphi(s) ds \quad (20)$$

On peut appliquer le lemme de Grönwall à φ pour obtenir la majoration :

$$\forall t \in \mathcal{E}, \varphi(t) \leq C_{\mu_0} \|x_0\| e^{C_{\mu_0}^2 \|x_0\| t} \quad (21)$$

Soit, en multipliant par $e^{-\mu_0 t}$:

$$\forall t \in \mathcal{E}, \|x(t)\| \leq \|x_0\| C_{\mu_0} e^{(C_{\mu_0}^2 \|x_0\| - \mu_0)t} \quad (22)$$

Fixons $0 < \eta < C$ tel que :

$$\eta C_{\mu_0}^2 - \mu_0 \leq \mu \quad \wedge \quad \eta C_{\mu_0} \leq \frac{C}{2} \quad (23)$$

Si on choisit x_0 de sorte à avoir $\|x_0\| < \eta$, on a alors bien, pour n'importe quel $t_0 \in \mathcal{E}$:

$$\|x(t_0)\| \leq \frac{C}{2} e^{-\mu t_0} < C e^{-\mu t} \quad (24)$$

et comme x est continue sur $[0, T^*[$, cette majoration reste vraie sur un voisinage de t_0 dans $[0, T^*[$. Donc $\mathcal{E}$ est ouvert dans $[0, T^*[$ et par connexité, ces deux ensembles sont égaux ! Ce raisonnement étant vrai pour tout $\|x_0\| < \eta$, on obtient bien notre résultat. $\square$

Ce lemme permet de conclure presque immédiatement. Prenons μ , C et η comme dans le lemme et soit $\|x_0\| \leq \eta$. Alors la solution maximale issue de x_0 (encore notée x) est bornée en temps positif, donc par théorème des bouts, elle est globale en temps positif. Ainsi, la majoration $\|x(t)\| \leq C e^{-\mu t}$ est vraie sur $\mathbb{R}_+$ tout entier. Comme on peut choisir la valeur de C , on obtient la stabilité de l'équilibre 0. Par ailleurs :

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \quad (25)$$

et donc le point 0 est asymptotiquement stable !

Références

- [1] Hervé QUEFFÉLEC et Claude ZUILY. *Analyse pour l'agrégation*. DUNOD.