

THÉORÈME TAUBERIEN DE HARDY ET LITTLEWOOD

- [223, 224, 230, 241, 243] –

—

Nous allons démontrer dans ce développement le théorème suivant :

Théorème 1 (Taubérien fort ([2], chap IV, problème 19)). *Soit (a_n) une suite de nombres complexes telle que :*

$$|a_n| = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (1)$$

On suppose de plus que la série de terme général (a_n) converge au sens d'Abel, c'est-à-dire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x < 1]{x \rightarrow 1} l \in \mathbb{C} \quad (2)$$

Alors la série des (a_n) converge, et sa somme est l .

On pose :

$$F : [0, 1[\rightarrow \mathbb{C} \quad (3)$$

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Dans le cadre de la démonstration, on introduit l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ telles que :

1. $\forall x \in [0, 1[, \sum a_n f(x^n)$ converge.

2. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(x^n) \xrightarrow[x < 1]{x \rightarrow 1} l$

Dans toute la suite, on supposera pour simplifier que $l = 0$, le cas général s'en déduisant aisément. Dans ce cas, on gagne notamment le fait que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel.

Reformulation du problème

On considère $g := \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1]}$. La démonstration du théorème va se résumer à tester l'appartenance de g à l'ensemble $\mathcal{F}$:

Proposition 2. Si $g \in \mathcal{F}$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0$.

Démonstration. On a, dans ce cas, pour $x < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) = \sum_{n=0}^{\lceil -\frac{\log(2)}{\log(x)} \rceil} a_n \quad (4)$$

$$\xrightarrow[x < 1]{x \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad (5)$$

$$(6)$$

Mais puisque $g \in \mathcal{F}$, cette dernière limite est égale à 0. $\square$

Tout l'enjeu de la démonstration va donc être de montrer que $g \in \mathcal{F}$. Remarquons en préambule que pour $x < 1$, la série des $a_n g(x^n)$ converge puisqu'il s'agit de ne sommer qu'un nombre fini de termes non nuls.

Les polynômes nuls en 0 sont dans $\mathcal{F}$

Faisons une première observation : les polynômes nuls en 0 appartiennent à $\mathcal{F}$. En effet, si m_k est la fonction monomiale $x \mapsto x^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, on a pour $0 \leq x < 1$ que la série des $a_n m_k(x^n)$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n m_k(x^n) = F(x^k) \xrightarrow[x < 1]{x \rightarrow 1} 0 \quad (7)$$

donc $m_k \in \mathcal{F}$. Par linéarité, on en déduit immédiatement que les polynômes s'annulant en 0 appartiennent à $\mathcal{F}$.

Ceci nous pousse à chercher à approximer g par de telles fonctions polynomiales.

Approximation de l'indicatrice par des polynômes

On va se ramener à travailler avec des fonctions polynomiales, dont on pourra extraire plus d'information. Fixons $\varepsilon > 0$.

Lemme 3. Il existe p et P deux fonctions polynomiales telles que :

1. $p \leq \frac{g-x}{x(1-x)} \leq P$
2. $\|P - p\|_1 \leq \varepsilon$

Démonstration. Commençons par remarquer que la fonction $h : x \mapsto \frac{g(x) - x}{x(1-x)}$ se prolonge par continuité en 0 et 1, avec les valeurs -1 et 1 respectivement. Soit $0 < \delta < \frac{1}{2}$. On construit une

application affine a_δ par interpolation, on imposant $a_\delta(\frac{1}{2} - \delta) = h(x - \delta)$ et $a_\delta(\frac{1}{2}) = h(\frac{1}{2}) = 2$. On approche alors h par au-dessus de la façon suivante :

$$\varphi_\delta : x \mapsto \begin{cases} \max\{h(x), a_\delta(x)\} + \frac{\varepsilon}{4} & \text{si } \frac{1}{2} - \delta \leq x \leq \frac{1}{2} \\ h(x) + \frac{\varepsilon}{4} & \text{sinon} \end{cases} \quad (8)$$

La fonction φ_δ est continue (ce sont des vérifications élémentaires). Ainsi, on peut utiliser le théorème de Weierstraß : il existe P_δ une fonction polynomiale telle que $\|P_\delta - \varphi_\delta\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Par construction, $P_\delta > h$, et on a :

$$\|P_\delta - h\|_1 = \int_0^{\frac{1}{2}-\delta} P(x) - h(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 P(x) - h(x) dx + \int_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}} P(x) - h(x) dx \quad (9)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4}(1 - \delta) + \int_{\frac{1}{2}-\delta}^1 |P_\delta(x) - \varphi_\delta(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}} |\varphi_\delta(x) - h(x)| dx \quad (10)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4} \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) + \|(\varphi_\delta - h)\mathbb{1}_{[\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}]}\|_1 \quad (11)$$

Ainsi, en passant à la limite supérieure lorsque $[\delta \rightarrow 0]$, et par convergence dominée, il vient :

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \|P_\delta - h\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad (12)$$

Donc il existe un certain δ tel que $\|P_\delta - h\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On construit de même une approximation polynomiale p par en-dessous. On a bien alors $\|P - p\|_1 \leq \varepsilon$. $\square$

Introduisons les fonctions polynomiales suivantes :

$$T : x \mapsto x + x(1 - x)P(x) \quad t : x \mapsto x + x(1 - x)t(x) \quad (13)$$

Par construction, $t \leq g \leq T$ et $T(0) = t(0) = 0$. C'est grâce à cet encadrement qu'on va réussir à montrer que $g \in \mathcal{F}$.

g est dans $\mathcal{F}$

On est maintenant en mesure de montrer que g est dans $\mathcal{F}$, et donc d'en déduire le théorème. On a déjà vu que pour $x < 1$, la série $\sum a_n g(x^n)$ ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls, et donc converge. Il faut, et il suffit donc de montrer que cette somme tend vers 0 lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures. Calculons :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t(x^n) \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| (g - t)(x^n) \quad (14)$$

$$\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| (T - t)(x^n) \quad (15)$$

$$\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| x^n (1 - x^n) (P - p)(x^n) \quad (16)$$

On va maintenant exploiter l'identité remarquable :

$$(1 - x^n) = (1 - x) \sum_{j=0}^{n-1} x^j \leq n(1 - x) \quad (17)$$

et comme a_n est un grand O de $\frac{1}{n}$, on obtient l'existence d'un réel M tel que pour tout n :

$$|a_n|(1 - x^n) \leq M(1 - x) \quad (18)$$

En injectant ceci dans l'inégalité, on trouve :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t(x^n) \right| \leq M(1 - x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n (P - p)(x^n) \quad (19)$$

Il nous reste à prouver un dernier lemme pour étudier le comportement asymptotique du majorant :

Lemme 4. *Soit q une fonction polynomiale. On a :*

$$(1 - x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n q(x^n) \xrightarrow[x < 1]{x \rightarrow 1} \int_0^1 q(s) ds \quad (20)$$

Démonstration. On le montre pour des monômes, le résultat général s'en déduisant par linéarité. Pour $k \in \mathbb{N}$:

$$(1 - x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n m_k(x^n) = (1 - x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^{(k+1)n} \quad (21)$$

$$= \frac{1 - x}{1 - x^{k+1}} \quad (22)$$

$$= \frac{1}{\sum_{j=0}^k x^j} \quad (23)$$

$$\xrightarrow[x < 1]{x \rightarrow 1} \frac{1}{k + 1} \quad (24)$$

$$= \int_0^1 m_k(s) ds \quad (25)$$

□

On en déduit finalement que notre majorant tend, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, vers M fois l'intégrale de $P - p$, qui n'est autre que $\|P - p\|_1$! Autrement dit, en passant à la limite supérieure :

$$\limsup_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t(x^n) \right| \leq M\varepsilon \quad (26)$$

Comme ceci vaut pour tout ε , et comme $t \in \mathcal{F}$, on obtient bien :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) \xrightarrow[x < 1]{x \rightarrow 1} 0 \quad (27)$$

et donc $g \in \mathcal{F}$! Le théorème taubérien est ainsi démontré.

Une application aux séries de Fourier

C'est Thomas Cavalazzi qui a remarqué cette application, qui est somme toute des plus sympathiques.

Application 5. Soit f une fonction continue 2π -périodique. On suppose que la suite des coefficients de Fourier de f est un grand $O(\frac{1}{|n|})$ lorsque $|n|$ tend vers $+\infty$. Alors la série de Fourier de f converge simplement vers f .

Démonstration. On introduit le noyau de Poisson :

$$\forall r \in [0, 1[, \quad P_r : x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} r^{|n|} \quad (28)$$

C'est une approximation de l'unité lorsque r tend vers 1 par valeurs inférieures (cf [1]). Comme f est uniformément continue et bornée, on a que $P_r * f$ converge uniformément vers f lorsque r tend vers 1 par valeurs inférieures. Or :

$$P_r * f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} r^{|n|} \quad (29)$$

En posant $a_n := c_n(f) e^{inx}$, on a par hypothèse $a_n = O(\frac{1}{n})$. Donc, comme la série de terme général $(a_n + a_{-n})$ converge au sens d'Abel, on a par le théorème taubérien qu'elle converge au sens usuel, c'est-à-dire que $f(x)$ est la somme de la série de Fourier de f en x . Pas mal, n'est-ce pas ? $\square$

Références

- [1] Mohammed El AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*. Ellipses.
- [2] Xavier GOURDON. *Analyse*. Ellipses.