Anaël Marit ENS Rennes

DIFFÉRENTIELLE DU FLOT

- 214, 215, 220, 221 -

—

Dans ce développement, on considère $d \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs de classe C^1. On s'intéresse à l'équation différentielle autonome :

$$x' = f(x) \tag{$\star$}$$

Comme f est C^1, c'est un champ de vecteur localement lipschitzien en la variable d'état : le théorème de Cauchy-Lipschitz indique que pour toute condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^d$, il existe une solution locale à $(\star)$ prenant la valeur x_0 et $t = 0$, solution qu'on notera $x(-; x_0)$. Notre objectif est de démontrer qu'on peut avoir un certain contrôle sur le temps d'existence des solutions :

Théorème 1 ([2], II.2.5). *Soit $\alpha \in \mathbb{R}^d$. Il existe $T^* > 0$ tel que pour tout $0 < T < T^*$, il existe un voisinage V de α dans $\mathbb{R}^d$ tel que pour tout x_0, le domaine de définition de la solution maximale à $(\star)$ issue de x_0 contienne $[-T, T]$. De plus, l'application :*

$$V \ni x_0 \mapsto x(-; x_0)|_{[-T,T]} \tag{1}$$

est de classe C^1.

La démonstration consistera en une utilisation astucieuse du théorème des fonctions implicites permettant d'exprimer localement une solution du problème comme une fonction C^1 de la condition initiale. Introduisons quelques notations. Fixons $T > 0$ tel que $x(-, \alpha)$ soit définie au moins sur $[-T, T]$ On définit :

$$E := (C^0([-T, T], \mathbb{R}^d), || \cdot ||_\infty) \tag{2}$$

On reformule le fait d'être solution de $(\star)$ comme le fait de satisfaire une équation vectorielle de la façon suivante :

$$\begin{aligned} F : E \times \mathbb{R}^d &\to E \\ (x, x_0) &\mapsto \left(t \mapsto x(t) - x_0 - \int_0^t f(x(s)) \mathrm{d}s \right) \end{aligned} \tag{3}$$

Il est alors évident que $x \in E$ est solution de $(\star)$ sur $[-T, T]$ avec la condition initiale $x(0) = x_0$ si, et seulement si, $F(x, x_0) = 0$. Cherchons à appliquer le théorème des fonctions implicites à F.

Calcul des différentielles partielles de F

On va dans un premier temps calculer les deux différentielles partielles de F, dans le but d'une part de montrer que la fonction est C^1, puis de montrer que la seconde différentielle partielle est inversible.

Différentielle en x_0

Celle-ci est aisée à calculer, car des trois composantes de F, une seule dépend de x_0. Celle-ci correspond à l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^d &\to E \\ x_0 &\mapsto (t \mapsto x_0) \end{aligned} \tag{4}$$

Cette application est clairement linéaire et continue, aussi :

$$\forall (x_0, h_0) \in (\mathbb{R}^d)^2,\ \forall x \in E,\ \mathrm{d}_2 F(x_0, x) \cdot h_0 = (t \mapsto h_0) \tag{5}$$

Remarquons que l'application $(x_0, x) \mapsto \mathrm{d}_2 F(x_0, x)$ est continue (elle ne dépend même pas de x et x_0...).

Différentielle en x

Cette partie est nettement plus délicate. Commençons par le lemme suivant :

Lemme 2. *On considère :*

$$\begin{aligned} G : E &\to E \\ x &\mapsto \left(t \mapsto \int_0^t f(x(s))\mathrm{d}s \right) \end{aligned} \tag{6}$$

G est différentiable, et sa différentielle est donnée par :

$$\forall (x, h) \in E^2,\ \mathrm{d}G(x) \cdot h = \left(t \mapsto \int_0^t \mathrm{d}f(x(s)) \cdot h(s)\mathrm{d}s \right) \tag{7}$$

Démonstration. On est en dimension infinie, aucun espoir d'aide du côté des dérivées partielles ! Qu'à cela ne tienne, revenons à la définition de la différentielle. Prenons $(x, h) \in E^2$. On a alors, pour $t \in [-T, T]$:

$$\begin{aligned} G(x+h)(t) &= \int_0^t f(x(s) + h(s))\mathrm{d}s && (8) \\ &= \int_0^t f(x(s)) + \mathrm{d}f(x(s)) \cdot h(s) + o(||h(s)||)\mathrm{d}s && (9) \\ &= G(x)(t) + \int_0^t \mathrm{d}f(x(s)) \cdot h(s)\mathrm{d}s + \int_0^t o(||h(s)||)\mathrm{d}s && (10) \end{aligned}$$

Ce premier calcul permet de conjecturer l'expression de la différentielle, mais ne résout pas le problème. On a deux choses à montrer : tout d'abord que le terme central est linéaire et continue en h, puis que le terme résiduel est un $o(||h||_\infty)$, ce qui n'est absolument pas évident, car d'un développement limité ponctuel de f, sous l'intégral qui plus est, on doit déduire un développement global.

La linéarité du terme central découle simplement de la linéarité de la différentielle et de l'intégrale. Montrons la continuité. Pour $t \in [-T, T]$, on a :

$$\left| \int_0^t \mathrm{d}f(x(s)) \cdot h(s) \mathrm{d}s \right| \leqslant \left| \int_0^t |||\mathrm{d}f(x(s))||| \times ||h(s)|| \mathrm{d}s \right|^{\text{(i)}} \tag{11}$$

$$\leqslant T \sup_{s \in [-T,T]} |||\mathrm{d}f(x(s))||| \times ||h||_\infty \tag{12}$$

Notons simplement que x étant continue et f étant C^1, l'application $s \mapsto \mathrm{d}f(x(s))$ est continue et donc elle est bornée en norme d'opérateur sur le compact $[-T, T]$. Ainsi, le terme central est bien continu en h.

Occupons-nous maintenant du petit o. Posons :

$$\Delta(t) := \left| G(x+h)(t) - G(x)(t) - \int_0^t \mathrm{d}f(x(s)) \cdot h(s) \mathrm{d}s \right| \tag{13}$$

Une petite réécriture des termes donne :

$$\Delta(t) = \left| \int_0^t f(x(s) + h(s)) - f(x(s)) - \mathrm{d}f(x(s)) \cdot h(s) \mathrm{d}s \right| \tag{14}$$

Cherchons à faire apparaître une différence de différentielles sous l'intégrale :

$$f(x(s) + h(s)) - f(x(s)) = \int_0^1 \mathrm{d}f(x(s) + \theta h(s)) \cdot h(s) \mathrm{d}\theta^{\text{(ii)}} \tag{15}$$

. Notre intégrale se réexprime alors de la façon suivante :

$$\Delta(t) = \left| \int_0^t \int_0^1 \mathrm{d}f(x(s) + \theta h(s)) \cdot h(s) - \mathrm{d}f(x(s)) \cdot h(s) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}s \right| \tag{16}$$

Or l'application $\mathrm{d}f$ est continue : par théorème de Heine, elle est uniformément continue sur les compacts. De plus, l'image de $[-T, T]$ par x est un compact de $\mathbb{R}^d$: soit $R > 0$ telle que cette image soit incluse dans $B_{\mathbb{R}^d}(0, R)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe, par uniforme continuité, $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x_0, y_0) \in \bar{B}_{\mathbb{R}^d}(0, R)^2, \; ||x_0 - y_0|| \leqslant \eta \implies |||\mathrm{d}f(x_0) - \mathrm{d}f(y_0)||| \leqslant \varepsilon \tag{17}$$

Ainsi, pour h de norme infinie inférieure à η et telle que $x + h$ reste à valeurs dans $\bar{B}_{\mathbb{R}^d}(0, R)$ (ce qui est vrai dès qu'on prend h suffisamment petite en norme infinie), on obtient la majoration :

$$\Delta(t) \leqslant \left| \int_0^t \int_0^1 |||\mathrm{d}f(x(s) + \theta h(s))||| \mathrm{d}\theta ||h(s)|| \mathrm{d}s \right| \tag{18}$$

$$\leqslant T\varepsilon ||h||_\infty \tag{19}$$

et comme ε peut être pris arbitrairement petit lorsque $[||h||_\infty \to 0]$, on trouve bien $\Delta = o(||h||_\infty)$, ce qui achève la démonstration du lemme. □

Ce lemme technique en poche, on calcule facilement la différentielle en x de F :

$$\mathrm{d}_1 F(x, x_0) \cdot h = \left(t \mapsto h(t) - \int_0^t \mathrm{d}f(x(s)) \cdot h(s) \mathrm{d}s \right) \tag{20}$$

(i). Attention à ne pas oublier les valeurs absolues : t pourrait être négatif !
(ii). Il s'agit de l'intégrale de $(\theta \mapsto f(x(s) + \theta h(s)))'$ le long du segment reliant $x(s) + h(s)$ à $x(s)$

Il reste toutefois à montrer que l'application $(x, x_0) \mapsto \mathrm{d}_1 F(x, x_0)$ est continue pour obtenir de le caractère C^1 de F. Cette application ne dépendant pas de x_0, il suffit de considérer $z \in E$ et d'observer, pour $h \in E$ et $t \in [-T, T]$:

$$|\mathrm{d}_1 F(x, x_0) \cdot h(t) - \mathrm{d}_1 F(z, x_0) \cdot h(t)| \leqslant \left| \int_0^t ||[\mathrm{d}f(x(s)) - \mathrm{d}f(z(s))] \cdot h(s)||\mathrm{d}s \right| \tag{21}$$

On exploite encore l'uniforme continuité de $\mathrm{d}f$ sur les compacts : si $B(0, R)$ est une boule ouverte qui contient $x([-T, T])$ et tel que la distance de $x([T, T])$ au complémentaire de cette boule soit au moins 1, il existe $1 > \eta > 0$ tel que :

$$\forall (v, w) \in (\mathbb{R}^d)^2,\ ||v - w|| \leqslant \eta \implies |||\mathrm{d}f(v) - \mathrm{d}f(w)||| \leqslant \varepsilon \tag{22}$$

On a alors, si $||x - z||_\infty \leqslant \eta$:

$$\begin{aligned} |\mathrm{d}_1 F(x, x_0) \cdot h(t) - \mathrm{d}_1 F(z, x_0) \cdot h(t)| &\leqslant \left| \int_0^T |||\mathrm{d}f(x(s)) - \mathrm{d}f(z(s))|||\mathrm{d}s \right| ||h||_\infty && (23) \\ &\leqslant T\varepsilon ||h||_\infty && (24) \end{aligned}$$

En passant à la norme d'opérateur :

$$||x - z||_\infty \leqslant \eta \implies |||\mathrm{d}_1 F(x, x_0) - \mathrm{d}_1 F(z, x_0)||| \leqslant T\varepsilon \tag{25}$$

et donc $\mathrm{d}_1 F$ est bien continue.

Inversibilité de $\mathrm{d}_1 F(x(-; \alpha), \alpha)$

Notons $y := x(-; \alpha)|_{[-T,T]} \in E$. On va montrer que $d_1 F(y, \alpha)$ est inversible, de sorte à pouvoir appliuer le théorème des fonctions implicites. Je propose deux façons de faire, selon la leçon présentée.

Pour la leçon 221

Pour avoir un bon recasage dans la leçon sur les équations différentielles linéaires, on va calculer explicitement l'inverse de $\mathrm{d}_1 F(y, \alpha)$ en résolvant une équation linéaire à coefficients variables. Attention, cette partie ne figure pas dans la référence et nécessite la notion hors-programme de résolvante ! Soit $z \in E$. On a, pour $h \in E$:

$$\mathrm{d}_1 F(y, \alpha) \cdot h = z \iff \forall t \in [-T, T],\ h(t) - \int_0^t \mathrm{d}f(y(s)) \cdot h(s)\mathrm{d}s = z(t) \tag{26}$$

Commençons par supposer que z est C^1. Il vient alors immmédiatement que l'éventuel antécédant h doit être C^1, ce qui permet de dériver l'équation ci-dessus :

$$\mathrm{d}_1 F(y, \alpha) \cdot h = z \iff \begin{cases} \forall t \in [-T, T],\ h'(t) - \mathrm{d}f(y(t)) \cdot h(t) = z'(t) \\ h(0) = z(0) \end{cases} \tag{27}$$

Puisque l'application $t \mapsto \mathrm{d}f(x(t))$ est continue à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$, il s'agit d'un système différentiel linéaire à coefficients variables, qu'on résout à l'aide de la formule de Duhamel.

Introduisons R la résolvante du système, c'est-à-dire l'application :

$$\begin{aligned} [-T,T]^2 &\to \mathscr{L}(\mathbb{R}^d) \\ (t,s) &\mapsto R(t,s) \end{aligned} \tag{28}$$

telle que $\partial_1 R(t,s) = \mathrm{d}f(y(t)) \circ R(t,s)$ et $R(t,t) = I_d$ pour tout t et s. On a alors :

$$\mathrm{d}_1 F(y,\alpha) \cdot h = z \iff \forall t \in [-T,T],\ h(t) = R(t,0) \cdot z(0) + \int_0^t R(t,s) \cdot z(s) \mathrm{d}s \tag{29}$$

On va chercher à éliminer les occurences de z' dans cette formule, afin d'obtenir une formule qui puisse être encore valable lorsque z est seulement supposée C^0. Pour cela, une petite intégration par parties nous donnera la solution :

$$\mathrm{d}_1 F(y,\alpha) \cdot h = z \iff \forall t \in [-T,T],\ h(t) = R(t,0) \cdot z(0) + [R(t,s) \cdot z(s)]_{s=0}^{s=t} - \int_0^t \partial_2 R(t,s) \cdot z(s) \mathrm{d}s \tag{30}$$

Par ailleurs, on sait calculer les dérivées partielles de la résolvante :

$$\partial_2 R(t,s) = -R(t,s) \circ \mathrm{d}f(y(s)) \tag{31}$$

ce qui fournit, après simplification :

$$\mathrm{d}_1 F(y,\alpha) \cdot h = z \iff \forall t \in [-T,T],\ h(t) = z(t) + \int_0^t R(t,s) \circ \mathrm{d}f(y(s)) \cdot z(s) \mathrm{d}s \tag{32}$$

Montrons maintenant que cette expression est encore celle de la solution lorsque z est seulement supposée continue. Posons :

$$\begin{aligned} S : E &\to E \\ z &\mapsto \left(t \mapsto z(t) + \int_0^t R(t,s) \circ \mathrm{d}f(y(s)) \cdot z(s) \mathrm{d}s \right) \end{aligned} \tag{33}$$

S est linéaire et continue en z, puisque :

$$||S(z)||_\infty \leqslant \left(1 + \sup_{(t,s) \in [-T,T]^2} |||R(t,s)||| \times \sup_{s \in [-T,T]} |||\mathrm{d}f(y(s))||| \right) ||z||_\infty \tag{34}$$

où les deux supremums sont finis car $s \mapsto \mathrm{d}f(y(s))$ et $(t,s) \mapsto R(t,s)$ sont continues et évaluées sur un compact.

On exploite maintenant la densité de $C^1([-T,T],\mathbb{R}^d)$ dans E (qu'on peut observer par exemple à l'aide tu théorème de Weierstraß) : restreints à l'espace des fonctions C^1, on a l'égalité :

$$\mathrm{d}_1 F(y,\alpha) \circ S = S \circ \mathrm{d}_1 F(y,\alpha) = Id_{C^1} \tag{35}$$

égalité qui se transporte sur E tout entier par uniforme continuité des opérateurs manipulés. Ainsi, $\mathrm{d}_1 F(y,\alpha)$ est inversible en tant qu'opérateur de E.

Pour les autres leçons

Il y a un moyen plus rapide de procéder, qui oblige cela dit à contraindre plus la valeur de T. On observe :

$$\mathrm{d}_1 F(y, \alpha) = Id_E - H \tag{36}$$

où H est l'opérateur de E défini par :

$$\forall h \in E,\ H(h) = \left(t \mapsto \int_0^t \mathrm{d}f(y(s)) \cdot h(s)\mathrm{d}s\right) \tag{37}$$

qui est linéaire et continu en h. Sa norme d'opérateur est majorée de la façon suivante :

$$|||H||| \leqslant T \sup_{s\in[-T,T]} |||\mathrm{d}f(y(s))||| \tag{38}$$

donc quitte à remplacer T par T' tel que

$$T' < \frac{1}{\sup_{s\in[-T,T]} |||\mathrm{d}f(y(s))|||} \text{ (iii)} \tag{39}$$

On obtient que $|||H||| \leqslant 1$. Un résultat général sur les algèbres de Banach prouve alors que $\mathrm{d}_1 F(y, \alpha)$ est inversible, et son inverse est donné par :

$$\mathrm{d}_1 F(y, \alpha)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} H^n \tag{40}$$

Conclusion de l'étude

Le théorème des fonctions implicites s'applique : il existe V un voisinage ouvert de α dans $\mathbb{R}^d$ et $\Phi : V \to E$ une fonction C^1 telle que :

$$\forall (x, x_0) \in E \times \mathbb{R}^d,\ (F(x, x_0) = 0 \wedge x_0 \in V) \iff (x = \Phi(x_0) \wedge x_0 \in V) \tag{41}$$

Or par définition de la fonction F, pour $x_0 \in V$, $\Phi(x_0) = x(-; x_0)|_{[-T,T]}$. Enfin, remarquons que notre preuve reste valable pour tout $T' < T$; la preuve du théorème est donc complète !

Annexe : la résolvante

Dans cette section, je propose d'introduire les quelques outils concernant la résolvante qui seront nécessaires si vous choisissez le chemin de preuve avec l'équation différentielle linéaire. Je conseille de mettre les propriétés en questions dans le plan. J'utilise pour toute cette partie [1], II-6-2.

On considère une équation différentielle linéaire à coefficients variables :

$$y' = A(t) \cdot y(t) \tag{42}$$

(iii). On doit supposer que f est non constant pour écrire ça, mais avouons que dans le cas contraire, le problème n'est pas bien intéressant... Attention par ailleurs aux dépendances : T a été fixé au préalable, et on prend T' qui dépend de T, mais dans la suite on écrira seulement T...

où $t \mapsto A(t)$ est une application continue à valeurs dans $\mathscr{L}(R^d)$ et définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Définition A (Résolvante). *On appelle résolvante du système au point $s \in I$, notée $R(-;s)$ la solution (globale) de l'équation linéaire* **matricielle** *:*

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) \\ X(s) = I_d \end{cases} \tag{43}$$

Remarque : Bien que la variable soit ici matricielle, il s'agit bien d'une équation linéaire, et donc le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire s'applique.

La résolvante sert à généraliser l'exponentielle de matrice, qui fournit la solution des systèmes linéaires autonomes, au cas des coefficients variables :

Proposition B. *La solution du problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) \\ y(s) = y_0 \end{cases} \tag{44}$$

est donnée par $t \mapsto R(t;s)y_0$.

Démonstration. C'est un calcul immédiat ! Posons $y : t \mapsto R(t;s)y_0$. Alors on trouve :

$$y'(t) = \partial_1 R(t;s)y_0 = A(t)R(t;s)y_0 = A(t)y(t) \tag{45}$$

par définition de la résolvante. De plus :

$$y(s) = R(s;s)y_0 = I_d y_0 = y_0 \tag{46}$$

□

Ceci va nous permettre d'utiliser la clause d'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz pour montrer des propriétés sur la résolvante.

Proposition C (Equations de la résolvante). *La résolvante satisfait les équations suivantes :*

1. $\forall \tau \in I,\ \forall (t,s) \in I^2,\ R(t;\tau)R(\tau;s) = R(t,s)$
2. *L'application $(t,s) \mapsto R(t;s)$ est continue.*
3. $\forall (t,s) \in I^2,\ \partial_1 R(t,s) = A(t)R(t,s), \quad \partial_2 R(t,s) = -R(t,s)A(s)$

Démonstration.

1. Soit $y_0 \in \mathbb{R}^d$. On considère, pour $s \in I$ fixé, l'application $u : t \mapsto R(t;s)y_0$. On s'intéresse alors au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = A(t) \cdot y(t) \\ y(\tau) = u(\tau) \end{cases} \tag{47}$$

Il est évident qque u est solution de ce problème de Cauchy. Mais on sait également, par la proposition précédente, que la solution est donnée par :

$$y : t \mapsto R(t;\tau)u(\tau) = R(t;\tau)R(\tau;s)y_0 \tag{48}$$

Ainsi, par unicité de la solution :

$$\forall t \in I,\ R(t;\tau)R(\tau;s)y_0 = R(t;s)y_0 \tag{49}$$

Comme c'est vrai pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^d$, cette égalité se reporte sur les matrices :

$$\forall (s,t) \in I^2,\ R(t;\tau)R(\tau;s) = R(t;s) \tag{50}$$

2. Comme cas particulier de la formule précédente, on trouve :

$$\forall (t,s) \in I^2,\ R(t;s)R(s;t) = I_d \tag{51}$$

Comme par construction, l'application $t \mapsto R(t;s)$ est continue à s fixé, on trouve que l'application $s \mapsto R(t;s) = R(s;t)^{-1}$ est continue par continuité de l'inverse matriciel. Ainsi, pour $(t_0, s_0) \in I^2$, et $(t,s) \in I^2$, on trouve :

$$R(t;s) = R(t;t_0)R(t_0;s) \xrightarrow[(t,s)\to(t_0,s_0)]{} R(t_0;t_0)R(t_0;s_0) = R(t_0;s_0) \tag{52}$$

par continuité du produit matriciel. Donc la résolvante est bien continue comme application de deux variables.

3. Enfin, par différentiabilité de l'inverse matriciel, l'application $s \mapsto R(t;s) = R(s;t)^{-1}$ est différentiable. Ainsi, en partant de l'équation $I_d = R(t;s)R(s;t)$, on trouve :

$$0 = \partial_s[R(t;s)R(s;t)] = \partial_2 R(t;s)R(s;t) + R(t;s)\partial_1 R(s;t) \tag{53}$$

et par définition de la résolvante, $\partial_1 R(s;t) = A(s)R(s;t)$. Finalement :

$$\partial_2 R(t;s)R(s;t) = -R(t;s)A(s)R(s;t) \tag{54}$$

Il ne reste qu'à simplifier par $R(s;t)$ (qui est inversible) pour obtenir l'équation souhaitée !

□

On conclut enfin avec la formule de Duhamel :

Théorème D (Formule de Duhamel). *La solution au problème de Cauchy avec terme source :*

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{55}$$

est donnée par :

$$t \mapsto R(t;t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t;s)b(s)\mathrm{d}s \tag{56}$$

Remarques sur ce développement

Ce développement repose essentiellement sur du calcul différentiel en dimension infinie, ce qui est théoriquement hors-programme à l'agreg. Ainsi, il faut être très carré sur le calcul différentiel dans les espaces de Banach pour pouvoir le présenter. J'ai fait mon possible pour bien détailler dans le poly, afin de rendre le raisonnement le plus compréhensible possible, mais je pense que pour pouvoir faire rentrer ça en quinze minutes, il faudra passer plus vite sur les calculs, et donc s'exposer à des questions de calcul différentiel, qui conduiront certainement à différentier des fonctionnelles sur des espaces de fonctions.

La contrepartie de ça, c'est que si vous aimez le calcul diff, ce développement fournit une très jolie (et très concrète !) application de la théorie dans les espaces de Banach abstraits, ce qui justifiera de placer tout votre plan de leçon dans un cadre plus général que $\mathbb{R}^n$ (le dernier rapport du jury l'écrit explicitement : c'est possible de tout faire dans les espaces de Banach à condition d'avoir de vraies applications à proposer).

Par ailleurs, je pense que c'est un développement de très bon niveau qui se recase très bien dans les quatre leçons que je propose (même équa diff linéaires à mon avis, vu qu'on utilise la formule de Duhamel et la résolvante (penser à la mettre dans le plan le cas échéant)). Personnellement, j'ai horreur des équa diff et j'aime beaucoup le calcul diff, donc ce développement est une petite pépite à mes yeux.

La référence est de notoriété publique difficile, et effectivement, tout ceci est fait de manière très elliptique dedans. Au moins, on a toutes les étapes de calcul clairement indiquées, ce qui évitera d'avoir à connaître chaque expression sur le bout des doigts, mais la preuve pour passer d'une formule à une autre devra être parfaitement maîtrisée pour éviter les trous de mémoire.

Bon, voilà qui devrait suffire pour aujourd'hui !

Références

[1] Sylvie Benzoni-Gavage. *Calcul différentiel et équations différentielles*. Dunod, 2014. isbn : 978-2-10-070611-2.

[2] Stéphane Gonnord et Nicolas Tosel. *Thèmes d'Analyse pour l'Agrégation - Calcul différentiel*. Ellipses, 1998.

Travail fortement inspiré d'un cours de Karine Beauchard
fait en collaboration avec Pierre Larivé