Automorphisme   8 par $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$

Étienne AFFALOU
ENS de Rennes - Année scolaire 2025-2026

Référence : Alain Debreil, Rached Mneimné. *Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ et ses métamorphoses.* Calvage & Mounet.
Recasages : Leçons 101, 103, 104, 106, 150 et 190.

Théorème Le groupe $\mathrm{Aut}(Q_8)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

☞ **Étape 0 :** *L'ordre de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ *est* 24.
En effet, on a $|\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)| = (3^2-1)(3^2-3) = 8\times 6 = 48$, puis comme le déterminant $\det : \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3) \to (\mathbb{F}_3)^*$ est un morphisme surjectif, le premier théorème d'isomorphisme assure que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)/\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq (\mathbb{F}_3)^*$. On en déduit que $|\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)| = |\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)|/|(\mathbb{F}_3)^*| = 48/2 = 24$.

☞ **Étape 1 :** *On s'intéresse à l'ordre des éléments de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$.
• Un élément d'ordre 2 annule le polynôme X^2-1 (scindé à racines simples sur $\mathbb{F}_3$), donc est diagonalisable avec des valeur propres dans $\{\pm 1\}$. Ainsi, un élément d'ordre 2 de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ est nécessairement $-I_2$.
• Les éléments d'ordre 4 vérifient donc $M^2 = -I_2$ donc ont pour polynôme caractéristique X^2+1. En particulier, M est de trace nulle donc $\exists \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{F}_3$ tels que $1+\alpha^2+\beta\gamma = 0$ et $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$. Inversement, les matrices de cette forme sont bien dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ et sont d'ordre 4. Il y a 3 choix possibles pour α, puis comme $-\beta\gamma = 1+\alpha^2 \neq 0$, il reste deux choix pour γ, et un seul pour β soit 6 éléments d'ordre 4.
• Si $\alpha \in (\mathbb{F}_3)^*$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et sa transposée sont manifestement d'ordre 3, donc il y a au moins 4 éléments d'ordre 3 dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$. Mais si on note n_3 le nombre de 3-Sylow de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$, les théorèmes de Sylow assurent que $n_3 \equiv 1[3]$ et que $n_3 \mid 8$ donc $n_3 \in \{1,4\}$, d'où $n_3 = 4$ vu le nombre d'éléments d'ordre 3 déjà trouvés. Il y a donc 8 éléments d'ordre 3 dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$.
• En multipliant un élément d'ordre 3 par $-I_2$, on trouve un élément d'ordre 6, d'où 8 éléments d'ordre 6.
À ce stade, il suffit de remarquer que $1+1+6+8+8 = 24$ pour s'assurer qu'on a tous les éléments de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$.

☞ **Étape 2 :** *Le groupe Q_8 s'injecte dans* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$, *et Q_8 est caractéristique dans* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$.
L'unique 2-Sylow de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ est un groupe non abélien d'ordre 8 qui n'a qu'un seul élément d'ordre 2, c'est donc Q_8. Maintenant, un automorphisme de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ préserve l'ordre des éléments, donc Q_8 est nécessairement envoyé sur Q_8 par l'étape précédente, et Q_8 est bien caractéristique dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$.

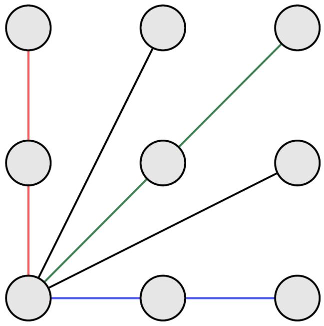
☞ **Étape 3 :** *On montre que* $\mathrm{Aut}(Q_8) \simeq PGL_2(\mathbb{F}_3)$.
Comme $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ est distingué dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$, l'étape précédente assure que Q_8 est distingué dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$. Cela permet de définir un morphisme $\varphi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3) \to \mathrm{Aut}(Q_8)$ par $\forall g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$, $\varphi(g)$ est l'automorphisme intérieur associé à g. Soit $g \in \ker(\varphi)$. Par définition, g commute avec tous les éléments de Q_8. En particulier, g commute avec les trois matrices

$$i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ j = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } k = ij = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

qui forment clairement une base de l'hyperplan des matrices de trace nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{F}_3)$. Donc g commute avec les matrices de trace nulle. Ainsi, si $g' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$, $gg' = g(g' - (\mathrm{tr}(g')/2)I_2) + g(\mathrm{tr}(g')/2)I_2 = g'g$ car $g' - (\mathrm{tr}(g')/2)I_2$ est de trace nulle et $(\mathrm{tr}(g')/2)I_2$ est scalaire. Notre élément g est donc dans le centre de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$, d'où $g \in \{\pm I_2\}$. Mais $\{\pm I_2\} \subset \ker(\varphi)$, donc on obtient un morphisme injectif $\tilde{\varphi} : \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(Q_8)$.
Remarquons que $|\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3)| = 24$ et qu'un automorphisme de Q_8 est entièrement déterminé par l'image de ses générateurs i et j, avec 6 choix pour l'image de i, puis 4 pour celle de j donc $|\,\mathrm{Aut}(Q_8)| \leqslant 24$. On a donc nécessairement $|\,\mathrm{Aut}(Q_8)| = 24$ et $\mathrm{Aut}(Q_8) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3)$.

☞ **Étape 4 :** *On montre que* $PGL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$.
Ce résultat classique se montre en faisant agir $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ sur les 4 droites vectorielles de $(\mathbb{F}_3)^2$ (faire un dessin et écrire que si k est le nombre de droites, $2k+1 = |(\mathbb{F}_3)^2| = 9$), d'où un morphisme $\theta : \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3) \to \mathfrak{S}_4$ dont le noyau est $\{\pm I_2\}$ (matrices scalaires). En quotientant par le noyau, on obtient bien un isomorphisme entre $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3)$ et $\mathfrak{S}_4$ par injectivité et égalité des cardinaux.

Remarques sur le développement :
• Il faut connaître la classification des groupes d'ordre 8, et avoir une idée de comment la démontrer.
• Savoir prouver les théorèmes de Sylow et donner des applications classiques est important.
• L'apparition d'un groupe spécial linéaire ne surprend pas, car on définit parfois Q_8 comme un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.
• On peut s'attendre à une question sur le comptage des sous-espaces vectoriels de dimension $d \in \{0, \cdots, n\}$ de $(\mathbb{F}_q)^n$.
• Il existe d'autres preuves de ce résultat. L'une d'elles utilise le fait que le groupe des automorphismes intérieurs de Q_8 est isomorphe à $Q_8/Z(Q_8) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 = V$, puis montre que $\mathrm{Aut}(Q_8)$ est un produit semi direct de V par $\mathrm{Aut}(V) \simeq \mathfrak{S}_3$, et on conclut en expliquant qu'un tel produit semi-direct est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$. Une autre montre que $\mathrm{Aut}(Q_8)$ agit fidèlement sur l'ensemble $X = \{\{x, -x\} \mid x = \{\varepsilon_1 i, \varepsilon_2 j, \varepsilon_3 k\}, (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{\pm 1\}^3\}$ qui a quatre éléments.



Les quatre droites vectorielles de $(\mathbb{F}_3)^2$.