Anaël Marit ENS Rennes

SOUS-GROUPES PETITS DE $GL_d(\mathbb{R})$

- 106, 155, 241, 243

—

L'objectif de ce développement est de démontrer que $GL_d(\mathbb{R})$ ne contient pas de sous-groupe non-trivial arbitrairement petit. La preuve repose essentiellement sur la construction d'un logarithme matriciel au voisinage de l'identité. J'ai choisi une approche algébrique, très différente de celle de Gurwinneuse. En conséquence, je ne recase pas du tout ce développement aux mêmes endroits.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ un entier non-nul. Dans toute la suite, on fixe $|||\cdot|||$ une norme matricielle. On notera $\mathcal{B}(A,\eta)$ la boule ouverte de centre A et de rayon η dans $GL_d(\mathbb{R})$. Nous allons montrer le résultat topologique suivant :

Théorème 1. *Il existe $\eta > 0$ tel que si G est un sous-groupe de $GL_d(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{B}(I_d,\eta)$, alors $G = \{I_d\}$.*

Logarithme matriciel ([2], §24.4)

Le cœur de la démonstration repose sur l'existence d'une inverse à l'exponentielle de matrice au voisinage de l'identité. Dans $\mathbb{R}$, l'exponentielle est définie par la même série entière que l'exponentielle de matrice. L'exponentielle admet un inverse bien connu : le logarithme. Dans les réels, on sait développer le logarithme en série entière au voisinage de 1 :

$$\forall |x| < 1,\ \log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \tag{1}$$

Cette égalité va nous servir d'heuristique pour construire le logarithme matriciel.

Définition 1 (Logarithme matriciel). *Pour tout $A \in \mathcal{B}(0,1)$, on pose :*

$$\log(I_d + A) := \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{A^n}{n} \tag{2}$$

Cette série est absolument convergente. (i)

Le logarithme ainsi défini a exactement les propriétés attendues :

(i). En travaillant sur le rayon spectral, on peut en réalité montrer que cette série est absolument convergente même en l'étendant à toutes les matrices de rayon spectral strictement plus petit que 1. Cela peut servir en fonction des recasages.

Théorème 2. *Pour tout $A \in \mathcal{B}(0,1)$, on a :*

$$\exp(\log(I_d + 1))^{\text{(ii)}} = I_d + A \tag{3}$$

Démonstration. Fixons $A \in \mathcal{B}(0,1)$. On défini alors :

$$\forall t \in [0,1],\ \varphi(t) := \log(I_d + tA) \tag{4}$$

La fonction φ est bien définie, continue et dérivable sur $[0,1]$. Pour le démontrer, posons :

$$\varphi_{abs}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{|||A^n|||}{n} z^n \tag{5}$$

Cette série entière a un rayon de convergence supérieur ou égal à $1/|||A||| > 1$. Aussi, φ_{abs} et φ'_{abs} convergent normalement sur tout compact du disque ouvert de convergence. Par théorème de dérivation d'une limite, on a que φ est dérivable sur $[0,1]$ de dérivée :

$$\varphi'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} t^{n-1} A^n = (I_d + tA)^{-1} A^{\text{(iii)}} \tag{6}$$

On peut alors considérer la fonction.

$$\psi : t \mapsto \exp(\varphi(t)) \tag{7}$$

Montrons que ψ est une fonction affine de t. On est tenté de dériver ψ et de montrer que sa dérivée est constante. ψ est en effet dérivable et sa dérivée est donnée par :

$$\psi'(t) = \varphi'(t) \exp(\varphi(t)) \tag{8}$$

Après réécriture, on obtient :

$$(I_d + tA)\psi'(t) = A \exp(\varphi(t)) \tag{9}$$

et ψ' est encore dérivable comme composée et produit de fonctions dérivables. On a alors :

$$A\psi'(t) + (I_d + tA)\psi''(t) = A\varphi'(t) \exp(\varphi(t)) = A\psi'(t) \tag{10}$$

Et donc :

$$(I_d + tA)\psi''(t) = 0 \tag{11}$$

soit $\psi''(t) = 0$ car $(I_d + tA)$ est inversible. Il suffit d'intégrer deux fois :

$$\psi(t) = t\psi'(0) + \psi(0) = tA + I_d \tag{12}$$

Ce qui prouve le théorème ! $\square$

(ii). Attention au sens de la composition !
(iii). Cette deuxième égalité est un résultat bien connu vrai dans les algèbres de Banach

Sous-groupes petits de $GL_d(\mathbb{R})$, [1]

Le logarithme matriciel va nous fournir un candidat pour η tel qu'il n'y a pas de sous-groupe non-trivial de diamètre inférieur à 2η. En effet, les résultats précédents donnent l'existence de U un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ et V un voisinage ouvert de I_d dans $GL_d(\mathbb{R})$ tels que l'exponentielle de matrice induise une bijection de U dans V, dont on note log la bijection réciproque. Quitte à restreindre U et V, on peut toujours les supposer bornés. Posons alors $U' := \dfrac{1}{2}U$ et $V' := \exp(U')$. Par l'absurde, on suppose donné G un sous-groupe de $GL_d(\mathbb{R})$ non-trivial contenu dans V'. Soit $A \in G \setminus \{I_d\}$. On dispose alors de $M := \log(A) \in U'$ tel que $\exp(M) = A$. Puisque U est borné et que la définition de U' implique qu'une somme de deux éléments de U' est dans U (mais pas nécessairement dans U' bien sûr), il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $k_0 M \in U \setminus U'$. Mais comme M commute avec elle-même, on a que $\exp(k_0 M) = A^{k_0} \in V'$. L'exponentielle étant bijective de U dans V, on a alors que $k_0 M$ est l'unique logarithme de A^{k_0} et devrait donc être dans U'... Absurde ! G est donc trivial.

Références

[1] Rached MNEIMÉ et Frédéric TESTARD. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques.* Hermann.

[2] Jean-Etienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et géométrie.*