Développement : Formule d'inversion de Pascal, dénombrement du nombre de surjections entre ensembles finis et formule de Faulhaber

Recasages possibles : 190
Références : Agrégat personnel

Développement :

- Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites numériques telles que $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$, alors $a_n = (-1)^n\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}a_k$.
- Soient p, n deux entiers non nuls, on pose $E_n = [\![1, n]\!]$ et on note $S_{p,n}$ le nombre de surjections de E_p dans E_n. Alors $S_{p,n} = (-1)^n\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^p$ si $p \geqslant n$.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k^p = \sum\limits_{k=1}^{p} S_{p,k}\binom{n+1}{k+1}$. En particulier, $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Preuve.

- On se place dans l'anneau des séries formelles et on pose $B(X) = \sum\limits_{k\geqslant 0}\frac{X^k}{k!}b_k$ la série génératrice exponentielle de la suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$. On a :

$$B(X) = \sum_{k\geqslant 0}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{a_i}{k!}X^k = \sum_{k\geqslant 0}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\frac{a_i}{k!}X^k = \sum_{k\geqslant 0}\sum_{i=0}^{k}\frac{a_i}{i!}X^i\frac{1}{(k-i)!}X^{k-i}.$$

Or on a la formule suivante du produit de Cauchy de deux séries :

$$\left(\sum_{k\geqslant 0}a_k\right)\left(\sum_{k\geqslant 0}b_k\right) = \sum_{k\geqslant 0}\left(\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}\right).$$

Il vient alors que :

$$B(X) = \left(\sum_{k\geqslant 0}\frac{X^k}{k!}\right)\left(\sum_{k\geqslant 0}\frac{X_k}{k!}a_k\right) = e^X A(X).$$

On a donc $A(X) = e^{-X}B(X)$. En développant les expressions, on trouve :

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{X^k}{k!}a_k = \left(\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-X)^k}{k!}\right)\left(\sum_{k\geqslant 0}\frac{X_k}{k!}b_k\right) = \sum_{k\geqslant 0}\sum_{i=0}^{k}\frac{X^i}{i!}b_i(-1)^{k-i}\frac{X^{k-i}}{(k-i)!}.$$

Ou encore :

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{X^k}{k!}a_k = \sum_{k\geqslant 0}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}b_i\frac{X^k}{k!}$$

Par identification due à l'unicité d'écriture, on obtient la relation voulue :

$$a_n = (-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}b_k$$

- Remarquons tout d'abord que si $p < n$, alors $S_{p,n} = 0$. On se place désormais dans le cas où $p \geqslant n$. Soit $A = E_n^{E_p}$, l'ensemble des applications de E_p dans E_n, déterminons son cardinal de deux manières distinctes. Dans un premier temps, construire un élément de A revient à choisir pour chacun des p éléments de départ une image parmi les n possibles. Il y a donc n choix pour chacun des p éléments d'où $\#A = n^p$. D'autre part, écrivons A de la façon suivante : $A = \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k$ où $A_k = \{f : E_p \to E_n \mid \#f(E_p) = k\}$. Il s'agit d'une partie de A donc la réunion est disjointe. Ainsi construire un élément de A revient à choisir un entier $k \in [\![1, n]\!]$ de sorte que f envoie les éléments de E_p sur k éléments distincts de E_n. Il y a $\binom{n}{k}$ choix de k tels éléments et $S_{p,k}$ façon d'envoyer p éléments sur k éléments. Comme $A = \biguplus\limits_{k=0}^{n} A_k$ et $\#A = n^p$, on obtient la formule suivante :

$$n^p = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S_{p,k}.$$

Posons désormais $a_k = S_{p,k}$ et $b_n = n^p$. Par la formule d'inversion de Pascal, on obtient l'égalité souhaitée :

$$S_{p,n} = (-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^p.$$

- Retrouvons maintenant la formule de Faulhaber définie par les $S_{p,k}$.
  On s'intéresse à l'ensemble $B = \{(a_0, a_1, \dots, a_p) \in E_{n+1} \times E_{n+1}^p \mid \forall 1 \leqslant k \leqslant p, a_0 > a_k\}$. Dénombrons maintenant de deux façons différentes l'ensemble B. Écrivons d'une part $B = \bigcup_{l=1}^{n+1} B_l$ où $B_l = \{(a_0, a_1, \dots, a_p) \in E_{n+1} \times E_{n+1}^p \mid \forall 1 \leqslant k \leqslant p, a_0 > a_k, a_0 = l\}$. C'est une partition de B donc $B = \biguplus_{l=1}^{n+1} B_l$. Soit $1 \leqslant l \leqslant n+1$ fixé, il y a $l-1$ choix possibles pour $a_1, \dots, a_p$ donc $\#B_l = (l-1)^p$ et $\#B = \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)^p = \sum_{k=1}^{n} k^p$.
  D'autre part, on écrit $B = \bigcup_{l=1}^{p} C_l$ avec $C_l = \{(a_0, a_1, \dots, a_p) \in E_{n+1} \times E_{n+1}^p \mid \forall 1 \leqslant k \leqslant p, \#\{a_0, \dots, a_p\} = l+1\}$. Décrire un élément de C_l revient à choisir $l+1$ valeurs distinctes de E_{n+1}, attribuer la plus grande à a_0 et envoyer $a_1, \dots, a_p$ surjectivement sur les l valeurs restantes. Ainsi $\#C_l = \binom{n+1}{l+1} S_{p,l}$. Mais comme $B = \biguplus_{l=1}^{p} C_l$, par ce qui précède, on obtient l'égalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \sum_{k=1}^{p} S_{p,n} \binom{n+1}{k+1}.$$

- Soit $p = 2$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = S_{2,1}\binom{n+1}{2} + S_{2,2}\binom{n+1}{3} = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n(n+1)(n-1)}{6}.$$

  Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)\,(3n + 2n(n-1))}{6} = \frac{n(n+1)(3+2n-2)}{6}.$$

  Finalement on retrouve la formule connue pour la somme des carrés des entiers de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$\square$