Anaël Marit ENS Rennes

POINT FIXE DE KAKUTANI ET SOUS-GROUPES COMPACTS DE $GL(E)$

- 103, 106, 161, 181, 203 –

—

Dans ce développement, on se propose de montrer que tout sous-groupe compact du groupe des automorphismes linéaires d'un espace euclidien peut se traduire comme un certain groupe d'isométries en prouvant l'existence d'un produit scalaire laissé invariant par notre sous-groupe. Pour cela, on va exploiter un argument de point fixe, en démontrant un théorème de point fixe dans la première partie.

L'entièreté de la preuve peut se trouver dans [1], mais j'ai emprunté le chemin de preuve de Matoumatheux, qui court-circuite certains arguments d'Alessandri en allant un peu plus vite dans la partie "point-fixe". La contrepartie, c'est que la preuve exploite moins d'arguments de compacité interessants que celle d'Alessandri.

Etant donné $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, on note $S(E)$ l'ensemble de sees endomorphismes auto-adjoints et $O(E)$ le groupe de ses isométries. Pour F un second espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, on note u^* l'adjoint de u.

Théorème du point fixe de Kakutani

Théorème 1 (Kakutani). *Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, G un sous-groupe compact de $GL(E)$ et K une partie commpacte et convexe de E. On suppose :*

$$\forall g \in G,\ g(K) \subset K \tag{1}$$

Alors, K contient un point fixe sous l'action de G.

Pour démontrer ce théorème, on va commencer par définir une norme G-invariante sur E. Le point fixe sera alors réalisé comme l'élément de K qui en atteint le minimum !

Lemme 2.

$$N : E \to \mathbb{R}_+$$
$$x \mapsto \max_{g \in G} ||g(x)||$$

Alors N est une norme sur E. De plus :

1. $\forall g \in G,\ \forall x \in E,\ N(g(x)) = N(x)$
2. $\forall (x,y) \in E^2,\ [N(x+y) = N(x) + N(y)] \iff [\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \ :\ x = \lambda y \vee y = \lambda x]$
3. *N admet un unique minimum sur K*

Démonstration. Tout d'abord, notons que N est bien définie par compacité de G. En effet, l'application $g \mapsto ||g(x)||$ est continue à x fixé, car on a :

$$||g(x) - h(x)|| \leqslant |||g-h||| \cdot ||x|| \to [h \to g]0 \tag{2}$$

Il suit que cette application est bien maximisée sur G. N définit par ailleurs une norme. Vérifions les axiomes un a un :

Séparation : pour $x \in E$ tel que $N(x) = 0$, on a que pour $g \in G$ quelconque, $||g(x)|| = 0$. Comme g est inversible, on a nécessairement $x = 0$.

Homogénéité : soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$N(\lambda x) = \max_{g \in G} |\lambda|\, ||g(x)|| \tag{3}$$
$$= |\lambda| \max_{g \in G} ||N(x)|| \qquad \text{car } |\lambda| \geqslant 0 \tag{4}$$
$$= |\lambda| N(x) \tag{5}$$

Inégalité triangulaire : soit $(x,y) \in E^2$ et soit $g \in G$. Alors :

$$||g(x+y)|| \leqslant ||g(x)|| + ||g(y)|| \leqslant N(x) + N(y) \tag{6}$$

Comme c'est vrai pour tout g, $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.

Montrons maintenant les propriétés de N.

1. Soit $g \in G$, soit $x \in E$. On a :

$$N(g(x)) = \max_{h \in G} ||(h \circ g)(x)|| = \max_{h \in Gg = G} ||h(x)|| = N(x) \tag{7}$$

   Donc N est bien G-invariante.

2. Soit x et y des vecteurs réalisant le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire de N. Soit $g \in G$ tel que $N(x+y) = ||(g(x+y)||$. On a alors :

$$N(x+y) = ||g(x+y)|| \leqslant ||g(x)|| + ||g(y)|| \leqslant N(x) + N(y) \tag{8}$$

   Puisqu'on est dans le cas d'égalité, on a nécessairement $||g(x) + g(y)|| = ||g(x)|| + ||g(y)||$. Comme $||\cdot||$ est une norme euclidienne, $g(x)$ et $g(y)$ sont positivement liés, et par inversibilité de g, x et y sont positiviement liés. Le sens réciproque est immédiat.

3. Notons que N est continue pour la topologie qu'elle engendre sur E, et que par équivalence des normes en dimension finie, elle est donc encore continue pour la topologie euclidenne de E. Ainsi, comme K est compact, N admet bien un minimum.

   Soient y et z deux minimums de N sur K. Alors, par convexité de K, $x/2 + y/2$ est encore un élément de K et on a :

$$N\left(\frac{y+2}{2}\right) \leqslant \frac{N(y)+N(z)}{2} = N(z) \tag{9}$$

   Par minimalité de $N(z)$, l'égalité est nécessairement atteinte, donc y et z sont positivement liés d'après le point précédent. Supposons $y = \lambda z$, où λ est un réel positif. Alors :

$$N(y) = \lambda N(z) = N(z) \tag{10}$$

   d'où $\lambda = 1$ et $y = z$. Le minimum est bien unique !

□

De cette construction, on déduit immédiatement le théorème de Kakutani : soit z l'unique minimum de N sur K. Alors, comme N est G-invariante :

$$\forall g \in G,\ N(g(z)) = N(z) \tag{11}$$

Donc $g(z)$ réalise le minimum de N pour tout G. Puisque les éléments de G envoient K sur lui-même, $g(z)$ est encore un élément de K, et par unicité du minimum, $g(z) = z$, ce pour tout $g \in G$.

Sous-groupes compacts de GL(E)

Dans cette partie, on considère $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension d.

Théorème 3. *Tout sous groupe compact H de $GL(E)$ est conjugué à un sous groupe de $O(E)$, c'est-à-dire qu'il existe $r \in GL(E)$ tel que :*

$$r^{-1}Hr < O(E) \tag{12}$$

Pour démontrer ce théorème, on va utiliser le théorème de Kakutani pour exhiber un produit scalaire H-invariant sur E (i). Cela revient à trouver un endomorphisme symétrique définit positif b qui soit stable sous l'action de H par congruence. On pose :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x \mid y \rangle_H := \langle u(x), y \rangle \tag{13}$$

on définit bien un produit scalaire sur E tel que pour tout $h \in H$, $\langle h(x) \mid h(y) \rangle_H = \langle x \mid y \rangle_H$.

Considérons :

$$\begin{aligned} \rho : H^{op\ (\mathrm{ii})} &\to GL(S(E)) \\ h &\mapsto (v \mapsto h^* s h) \end{aligned}$$

(i). Si le fait que l'existence d'un tel produit scalaire implique l'existence du morphisme r, rendez-vous en annexe !

C'est un morphisme de groupes : étant donné h et g dans H, on a :

$$\forall v \in S(E),\ \rho(h \cdot_{op} g)(S) = (gh)^* v(gh) = (\rho(h) \circ \rho(g))(v) \tag{15}$$

C'est de plus une application continue. Pour plus de clareté, on notera simplement $||\cdot||$ la norme d'opérateur sur $\mathscr{L}(E)$ subordonnée à la norme euclidienne et $|||\cdot|||$ la norme sur $\mathscr{L}(S(E))$ subordonnée à cette norme d'opérateur.

$$\begin{aligned}
\forall v \in S(E),\ ||\rho(g)(v) - \rho(h)(v)|| &= ||g^* vg - h^* vh|| && (16)\\
&= ||(g-h)^* v(g-h) + g^* vh + h^* vh - 2h^* vh|| && (17)\\
&\leqslant ||(g-h)^* v(g-h)|| + ||(g-h)^* vh|| + ||h^* v(g-h)|| && (18)\\
&\leqslant (||g-h||^2 + 2||g-h||\,||h||)||v|| && (19)
\end{aligned}$$

Donc en passant à la norme d'opérateur :

$$|||\rho(g) - \rho(v)||| \leqslant (||g-h||^2 + 2||g-h||\,||h||) \xrightarrow[h \to g]{} 0 \tag{20}$$

Donc ρ est bien continu. Ainsi, en posant $G := \mathrm{Im}(\rho)$, on définit un sous-groupe compact de $GL(S(E))$. Trouvons-lui une partie convexe compacte stable. On pose :

$$K := \mathrm{Conv}(\{h^* h, h \in H\}) \tag{21}$$

où Conv désigne l'enveloppe convexe. On a trois choses à démontrer :

Lemme 4.

1. *K est compact.*
2. *$K \subset S^{++}(E)$*
3. *K est stabilisé par l'action de G (i.e. pour tout $g \in G,\ g(K) \subset K$)*

Démonstration.

1. Il s'agit d'un cas particulier d'un fait plus général : dans un espace vectoriel de dimension d finie, l'enveloppe convexe d'un compact est compacte. C'est un corollaire du lemme de Caratheodory :

   Théorème 5 (Caratheodory [(iii)]). *Soit E un espace vectoriel de dimension d. Soit $A \subset E$. Alors :*

   $$\mathrm{Conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x_i,\ (x_i) \subset A,\ (\lambda_i) \subset [0,1] \mid \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1 \right\} \tag{22}$$

(ii). On désigne par H^{op} le groupe opposé de H, c'est-à-dire le groupe dont les éléments sont ceux de H mais où la loi de composition est renversée :

$$\forall (g,h) \in H^{op2},\ g \cdot_{op} h := h \circ g \tag{14}$$

On le verra, cela permettra à l'application ρ d'être un morphisme de groupes au sens propre du terme lorsqu'elle aurait été contrinvariante vis-à-vis de la loi de groupe sur H.

on peut donc exprimer K comme l'image de l'application continue :

$$\{h^*h, h \in H\}^{d+1} \times \left\{ (\lambda_i) \in [0,1]^{d+1} \mid \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1 \right\} \to K$$
$$(x_i), (\lambda_i) \mapsto \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x_i$$

Comme l'ensemble de départ est compact, K est compact.

2. Cela vient du fait que $S^{++}(E)$ est convexe. En effet, étant donné $(u,v) \in S^{++}(E)^2$ et $t \in [0,1]$, on a :

$$\forall x \in E,\ \langle (tu + (1-t)v)(x), x\rangle = t\langle u(x), x\rangle + (1-t)\langle v(x), x\rangle > 0 \tag{23}$$

donc $tu + (1-t)v \in S^{++}(E)$.

3. Soit $g = \rho(h) \in G$, et soit $f \in H$. Alors :

$$g(f^*f) = h^*f^*fh = \underbrace{(fh)^*}_{\in H} \underbrace{fh}_{\in H} \tag{24}$$

Donc $\{h^*h,\ h \in H\}$ est stable sous l'action de G et par linéarité, K est stable sous l'action de G.

□

On peut donc appliquer le théorème de Kakutani à K : il existe $u \in K \subset S^{++}(E)$ tel que u soit stable par congruence par des éléments de H, c'est-à-dire qu'il existe un produit scalaire H-invariant sur E.

Annexe : produits scalaires invariants et conjugaison au groupe orthogonal

Dans ce développement, on a utilisé le résultat suivant, qu'il vaut mieux je pense ne pas démontrer, à moins que vous ne soyez très rapide à l'oral et très sûr.e de vous :

Proposition 6. *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et soit G un sous-groupe de $GL(E)$. On suppose qu'il existe $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_G$ un produit scalaire sur E qui soit G-invariant. Alors G est conjugué à un sous-groupe de $O(E)$.*

Démonstration. La démonstration est plutôt simple à condition d'avoir bien conscience des objets qu'on manipule. Pour cela, il faut absolument considérer un espace euclidien comme **un couple** composé d'un espace vectoriel **et** d'un produit scalaire ! Pour aller dans ce sens, on notera $O(\langle \cdot, \cdot \rangle))$ plutôt que $O(E)$ le groupe orthogonal pour bien signifier la dépendance au choix

(iii). Je pense qu'on ne peut pas espérer démontrer ce théorème en 15 minutes, le développement étant déjà assez long, mais il faut en connaître la preuve ! Puisqu'on l'utilise sans démonstration, je pense qu'il faut que le théorème soit présent dans le plan, clairement indiqué comme ne faisant pas partie du développement, afin de ne pas surprendre le jury.

du produit scalaire sur E.

La G-invariance de $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_G$ revient exactement à dire que $G \subset O(\langle \cdot \mid \cdot \rangle_G)$. Adoptons le point de vue des formes quadratiques : nos deux produits scalaires sont les formes polaires de formes quadratiques définies positives, qui sont toutes les deux représentées par la matrice identité dans des bases orthonormées respectives. Il suit :

$$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle) \cong (E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle_G) \tag{25}$$

où l'isomorphisme est au sens des espaces quadratiques. En d'autres termes, on dispose d'une isométrie $r : (E, \langle \cdot, \cdot \rangle) \to (E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle_G)$ [iv]. Prenons alors $g \in G$. On a :

$$(r^{-1}gr)(rgr^{-1})^* = r^{-1}grr^*g^*(r^{-1})^* = Id_E \tag{26}$$

et donc $r^{-1}gr \in O(\langle \cdot, \cdot \rangle)$, ce qui prouve que G est conjugué à un sous-groupe de $O(\langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Remarque : Pour celles et ceux qui aiment les diagrammes commutatifs, c'est cadeau :

$$\begin{tikzcd}
(E, \langle \cdot, \cdot \rangle) \arrow[r, "r \circ g \circ r^{-1}"] \arrow[d, "r"'] & (E, \langle \cdot, \cdot \rangle) \arrow[d, "r"] \\
(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle_G) \arrow[r, "g"] & (E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle_G)
\end{tikzcd}$$

Les deux flèches r et g sont des isomorphismes d'espaces quadratiques, donc nécessairement la dernière flèche l'est aussi, ce qui est l'exacte traduction du fait que c'est un élément du groupe orthogonal :) □

Références

[1] Michel ALESSANDRI. *Thèmes de géométrie.* Dunod, 1999.

(iv). Pour éviter les formes quadratiques, on peut construire explicitement r en envoyant une base orthonormée sur une base orthonormée.