

FORMULE SOMMATOIRE DE POISSON ET INVERSION DE FOURIER DANS L^2

- 209, 235, 241, 246, 250 -

—

L'objectif de ce développement est de démontrer la formule d'inversion de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ à l'aide de la formule sommatoire de Poisson. La démonstration permettra de créer un lien entre la transformée de Fourier d'une fonction et la théorie des séries de Fourier, ce qui n'était pas évident a priori.

Notations

Etant donnée une fonction mesurable sur $\mathbb{R}$, on notera lorsque ça a du sens :

$$\mathcal{F}[f] : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2i\pi\xi x} dx \quad (1)$$

sa transformée de Fourier ⁽ⁱ⁾. Dans le cas où f est L^2 , on notera toujours $\mathcal{F}[f]$ sa transformée de Fourier, même lorsque la formulation intégrale n'a pas de sens. Si de plus f est supposée $T\mathbb{Z}$ -périodique, on écrira :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n^{(T)}(f) := \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-\frac{2i\pi n x}{T}} dx \quad (2)$$

ses coefficients de Fourier.

On désigne par $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace de Schwartz, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ dont toutes les dérivées sont à décroissance rapide (i.e. plus vite que n'importe quel polynôme).

Formule sommatoire de Poisson [2], p 95

Nous allons montrer le théorème suivant :

Théorème 1 (Formule sommatoire de Poisson). *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a alors :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + Tn) = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}[f] \left(\frac{n}{T} \right) e^{\frac{2i\pi n x}{T}} \quad \text{(ii)} \quad (3)$$

(i). Attention, la constante 2π dans le noyau exponentielle n'est pas standard. On exprime $\mathcal{F}$ comme ça car les expressions obtenues dans la suite seront beaucoup plus élégantes.

(ii). La somme sur $\mathbb{Z}$ est au sens suivant : les sommes prises respectivement sur les entiers positifs et négatifs convergent absolument, et la somme sur $\mathbb{Z}$ est tout simplement leur somme.

La démonstration va reposer sur la théorie des séries de Fourier. Comme f n'est pas périodique, la première étape va consister à la transformer en une fonction périodique « la plus proche possible » de f .

Lemme 1. Soit $T > 0$. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_T(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + Tn) \quad (4)$$

Alors f_T est bien définie et C^∞ .

Démonstration. Prenons $\alpha \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 + 1)|f^{(\alpha)}(x)| \leq M \quad (5)$$

qui existe car $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a alors, en se plaçant sur un compact $K \subset \mathbb{R}$:

$$\|x \mapsto f^{(\alpha)}(x + Tn)\|_{K,\infty} \leq \sup_{x \in K} \frac{M}{(x + Tn)^2 + 1} \sim \frac{M}{T^2 n^2} \quad (6)$$

où l'équivalent est pris lorsque $|n| \rightarrow +\infty$. Ainsi, la série de fonctions de terme général $x \mapsto f^{(\alpha)}(x + Tn)$ est normalement convergente, ce qui implique en particulier que f_T est bien définie et C^∞ .

On remarque alors que f_T est $T\mathbb{Z}$ -périodique en calculant $f_T(x + kT)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ⁽ⁱⁱⁱ⁾. $\square$

Comme f_T est T -périodique, on peut calculer ses coefficients $T\mathbb{Z}$ -périodiques.

Lemme 2. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Le k -ième coefficient de Fourier $T\mathbb{Z}$ -périodique de f_T est donné par :

$$c_k^{(T)}(f) = \frac{1}{T} \mathcal{F}[f] \left(\frac{k}{T} \right) \quad (7)$$

(iii). Le procédé de périodisation que l'on vient d'appliquer est en fait un cas particulier de quelque chose de plus général. Si un groupe G agit sur un ensemble, on peut faire une sorte de moyenne sous l'action du groupe pour fabriquer des fonctions G -invariantes. Dans le cas typique où G est fini, on pose souvent

$$f^{(G)} : x \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g \cdot x)$$

La fonction $f^{(G)}$ est alors insensible à l'action du groupe G

Démonstration. C'est un calcul direct :

$$c_k^{(T)}(f_T) := \frac{1}{T} \int_0^T f_T(x) e^{-\frac{2i\pi kx}{T}} dx \quad (8)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^T f(x + Tn) e^{-\frac{2i\pi kx}{T}} dx \quad \text{par convergence normale de la série} \quad (9)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{Tn}^{T(n+1)} f(x) e^{-\frac{2i\pi kx}{T}} \overset{\text{red arrow}}{e^{2i\pi kn}} \overset{\text{red arrow}}{1} \quad \text{avec } x \leftarrow x - Tn \quad (10)$$

$$= \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{\frac{2i\pi kx}{T}} dx \quad (11)$$

$$= \frac{1}{T} \mathcal{F}[f] \left(\frac{k}{T} \right) \quad (12)$$

Remarque : L'entièreté du développement peut se faire en prenant $T = 1$, ce qui a le mérite de simplifier les calculs et les expressions obtenues. Toutefois, en prenant T quelconque, on peut remarquer un lien très fort qui apparaît entre les théories de la transformée de Fourier et des séries de Fourier. En effet, en connaissant les coefficients de Fourier de toutes les périodisées de f , on connaît intégralement sa transformée de Fourier, et réciproquement, ce qui n'apparaît pas si on se contente du cas $T = 1$.

□

On est maintenant en mesure de démontrer la formule sommatoire de Poisson. En effet, f_T étant C^1 , on peut appliquer le théorème de Dirichlet :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_T(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^{(T)}(f) e^{\frac{2i\pi kx}{T}} = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}[f] \left(\frac{k}{T} \right) e^{\frac{2i\pi kx}{T}} \quad (13)$$

D'où la formule sommatoire de Poisson :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + Tn) = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}[f] \left(\frac{k}{T} \right) e^{\frac{2i\pi kx}{T}} \quad (14)$$

Remarque : Dans le cas $x = 0$, $T = 1$, on obtient la plus élégante formule :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}[f](n) \quad (15)$$

Inversion de Fourier dans L^2 [1], p. 254

La formule sommatoire de Poisson va nous permettre de démontrer que la transformée de Fourier est un automorphisme continu de $L^2(\mathbb{R})$. Pour cela, nous allons commencer par démontrer la formule d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

Théorème 2 (Inversion de Fourier dans l'espace de Schwartz). Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a l'égalité suivante :

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f](t) e^{2i\pi xt} dt \quad (16)$$

On commence par poser, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi_t : x \mapsto f(x) e^{2i\pi tx}$. ψ_t est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et donc on peut lui appliquer deux fois la formule sommatoire de Poisson avec $T = 1$ et $x = 0$.

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_t(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}[\psi_t](k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}[\mathcal{F}[\psi_t]](k) \quad (17)$$

On peut maintenant réécrire cette expression en exploitant le fait que la transformée de Fourier transforme les translations en phase pure :

$$\mathcal{F}[s \mapsto f(s) e^{2i\pi st}](x) = \mathcal{F}[f](x - t) = \mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](x) e^{2i\pi xt} \quad (18)$$

et donc notre formule devient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) e^{2i\pi kt} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](k) e^{-2i\pi kt} \quad (19)$$

Comme ces deux séries sont normalement convergente (la transformée de Fourier stabilisant l'espace de Schwartz), on peut intégrer en t et intervertir la somme et l'intégrale :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \int_0^1 e^{ikt} dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](k) \int_0^1 e^{-ikt} dt \quad (20)$$

C'est-à-dire :

$$f(0) = \mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](0) \quad (21)$$

Cette formule étant vraie pour toute fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on peut l'appliquer à la fonction $\zeta_x : t \mapsto f(x + t)$ pour un x quelconque, ce qui donne :

$$f(x) = \zeta_x(0) \quad (22)$$

$$= \mathcal{F}[\mathcal{F}[\zeta_x]](0) \quad (23)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[\zeta_x](t) dt \quad (24)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f](t) e^{2i\pi xt} dt \quad (25)$$

C'est exactement la formule d'inversion de Fourier !

Remarque : On peut s'étonner qu'il n'y ait pas de constante devant l'intégrale. Toutefois, la définition que nous avons choisie de la transformée de Fourier n'est pas standard. On retrouve la formulation standard en faisant le changement de variable $u \leftarrow 2\pi t$ dans l'intégrale, et alors on retrouve l'expression usuelle avec $\frac{1}{2\pi}$ en facteur.

On est maintenant en mesure de prouver l'important théorème suivant :

Théorème 3. *La transformée de Fourier est un automorphisme continu de $L^2(\mathbb{R})$.*

En effet, on peut maintenant poser l'opérateur :

$$\begin{aligned}\mathcal{G} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto (x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f](\xi) e^{i\xi x} d\xi)\end{aligned}$$

Cet opérateur est continu pour la topologie L^2 , car il s'exprime facilement en fonction de la transformée de Fourier. Il existe donc un unique opérateur linéaire continu, que nous noterons toujours $\mathcal{G}$, allant de L^2 dans lui-même, et coïncidant avec l'expression intégrale ci-dessus sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Alors, les opérateurs $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ et $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ sont linéaires continus de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même et coïncident avec l'identité de $L^2(\mathbb{R})$ sur la partie dense qu'est $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Nécessairement, $\mathcal{F}$ est inversible et son inverse est donné par $\mathcal{G}$.

Références

- [1] Ahmed LESFARI. *Distributions, analyse de FOURIER et transformation de LAPLACE*. Ellipses.
- [2] Hervé QUEFFÉLEC et Claude ZUILY. *Analyse pour l'agrégation*. DUNOD.