Voir la vidéo sur YouTube Cadre : On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Définitions et premières caractérisations

1.1. Rappels : Probabilités conditionnelles [Chabanol p14]. —

– **Def (Probabilité conditionnelle) :** Soit A un événement de probabilité non nulle. La probabilité conditionnelle d'un événement B sachant A est définie par :

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

– **Formule des probabilités totales :** Si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements (c'est-à-dire une partition de Ω), alors pour tout événement B :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i \in I, \mathbb{P}(A_i) > 0} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

1.2. Définitions générales de l'indépendance [Chabanol p26-29]. —

– **Def 10 :** On dit que des sous-tribus $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ de $\mathcal{A}$ sont **indépendantes** si pour tous $A_i \in \mathcal{B}_i$:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

– **Def 11 :** On dit que des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont **indépendantes** si les tribus qu'elles engendrent, $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n)$, sont indépendantes.
– **Theorème 12 :** Des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si la loi du vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$ est la mesure produit des lois de chaque variable :

$$\mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$$

– Exo 41 (Garet Kurztmann)
– Si $A_1, ..A_n$ sont indépendants alors leur complémentaires aussi

1.3. Cas discrets et à densité. —

– **Prop14 (Cas discret) :** Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout couple (x, y) de valeurs possibles :

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

– **Prop15 (Cas à densité) :** n variables aléatoires réelles $X_1, \dots, X_n$ ayant chacune une densité f_i sont indépendantes si et seulement si le vecteur $(X_1, \dots, X_n)$ admet pour densité le produit des densités :

$$f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

1.4. Propriétés fondamentales. —

– **Prop17 (Stabilité par composition) :** Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et $g_1, \dots, g_n$ sont des fonctions mesurables, alors les variables aléatoires $g_1(X_1), \dots, g_n(X_n)$ sont indépendantes.
– **Prop16 (Lemme des coalitions) :** Si des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors on peut les regrouper en "paquets" qui restent indépendants. Par exemple, les variables aléatoires $Y_1 = (X_1, \dots, X_k)$ et $Y_2 = (X_{k+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

1.5. Somme de variables aléatoires indépendantes. —

– **Prop18 :** Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes, la loi de leur somme $X + Y$ est le **produit de convolution** de leurs lois, noté $\mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y$.
  - **Cas discret :** Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(X+Y = n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n-k)$
  - **Cas à densité :** Si X et Y ont pour densités f_X et f_Y, alors $X + Y$ a pour densité $f_{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z - x) dx$

– **Exe :** Si X et Y sont indépendantes et suivent une loi uniforme sur $[0, 1]$, leur somme $X + Y$ a une densité "triangulaire" définie par :

$$f_{X+Y}(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0,1] \\ 2-t & \text{si } t \in [1,2] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

– **Exe (Stabilité de la loi Gamma) :** Si $X \sim \Gamma(a, \lambda)$ et $Y \sim \Gamma(b, \lambda)$ sont indépendantes, alors $X + Y \sim \Gamma(a + b, \lambda)$.

2. Indépendance, espérance et fonctions caractéristiques [Garet]

2.1. Caractérisation par la densité. —

– **Theorème 5.27 :** Soient X et Y deux vecteurs aléatoires indépendants à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$. Si X admet une densité f et Y une densité g, alors (X, Y) admet pour densité $h(x, y) = f(x)g(y)$.
– **Theorème 5.28 :** Réciproquement, si le couple (X, Y) admet une densité $h(x, y) = f(x)g(y)$, alors X et Y sont indépendantes.

2.2. Indépendance et espérance. —

– **Theorème 6.36 :** Si X et Y sont deux v.a. réelles indépendantes et intégrables, alors XY est intégrable et :

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

– **Cor 6.37 :** Si X et Y sont intégrables et indépendantes, $\text{Cov}(X, Y) = 0$ (décorrélées).
– **Rem 6.38 :** La réciproque est fausse : des variables peuvent être décorrélées sans être indépendantes.

- **Cor 6.39 :** Si X et Y sont indépendantes et admettent un moment d'ordre 2 :

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

2.3. Caractérisation par les fonctions caractéristiques. —

- **Déf :** Si X est une VA à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, sa fonction caractéristique est $\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{i\langle t,X\rangle}]$ pour $t \in \mathbb{R}^d$.
- **Theorème 9.12 :**Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles **indépendantes**, alors la fonction caractéristique de leur somme $X+Y$ est le produit de leurs fonctions caractéristiques :

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$$

- **Theorème 9.15 (Critère d'indépendance) :** Des v.a. X et Y sont **indépendantes** si et seulement si :

$$\phi_{(X,Y)}(s,t) = \phi_X(s)\phi_Y(t)$$

3. Théorèmes limites fondamentaux

3.1. Lemme de Borel-Cantelli. —

- **Lem (Borel-Cantelli) :** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de la tribu $\mathcal{A}$. On note $\{\limsup A_n\}$ ou $\{A_n \text{ i.s.}\}$ l'événement "une infinité d'événements A_n se réalisent".
  1. Si la série des probabilités des événements A_n converge, alors la probabilité que les A_n se produisent une infinité de fois est nulle.

$$\text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty, \quad \text{alors } \mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$$

  2. Si les événements A_n sont mutuellement indépendants et si la série de leurs probabilités diverge, alors la probabilité qu'une infinité d'entre eux se réalisent est égale à 1.

$$\text{Si les } (A_n) \text{ sont indépendants et } \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty, \quad \text{alors } \mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$$

3.2. Loi Forte des Grands Nombres (LFGN). —

- **Theorème (Loi Forte des Grands Nombres de Kolmogorov) :** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires **indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.)**. On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ la somme partielle. Si les variables sont intégrables (i.e. $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$), alors la moyenne empirique converge presque sûrement vers l'espérance théorique $\mu = \mathbb{E}[X_1]$.

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mu$$

Cela signifie : $\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu\right) = 1$.

3.3. Théorème Central Limite (TCL). —

- **TCL:** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires **i.i.d.**. On suppose qu'elles admettent une espérance μ et une variance σ^2 finies et non nulle. Alors la somme partielle centrée et réduite converge **en loi** vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

- **Rem :** La LFGN décrit le comportement de la limite de la moyenne (une constante), tandis que le TCL décrit la fluctuation de cette moyenne autour de sa limite. C'est un résultat sur la vitesse de convergence.

Formule de stirling [Exo 251 Garet Kurtzmann] avec adaptation
Voir la vidéo sur la formule de stirling sur YouTube
