

THÉORÈME DE FURSTENBERG-KESTEN

- (223, 262, 266) -

Nous allons démontrer un théorème attribué à Hillel Furstenberg et Harry Kesten portant sur le comportement asymptotique d'un produit de matrices aléatoires. Ce théorème trouve des applications en physique, et permet d'une certaine manière d'étendre la loi faible des grands nombres aux produits de matrices aléatoires.

Soit $d \in \mathbb{N}$. On considère $||| \cdot |||$ une norme d'opérateur sur $GL_d(\mathbb{C})$ et S une partie compacte de $GL_d(\mathbb{C})$. Soit μ une mesure de probabilité sur $GL_d(\mathbb{C})$ de support contenu dans S . L'objectif est de démontrer :

Théorème 1 (Furstenberg-Kesten, [1]). *Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de matrices aléatoires de loi μ . On pose alors :*

$$\Psi_n := \prod_{i=1}^n M_i \quad (1)$$

Il existe une constante déterministe $l(\mu) \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log |||\Psi_n|||^{(i)} = l(\mu) \quad (2)$$

au sens L^1 .

Remarquons que lorsque $d = 1$, une matrice aléatoire est exactement une variable aléatoire complexe. La compacité du support de S permet d'assimiler les $(|||M_i|||)$ à une suite de variables aléatoires L^∞ et alors, la loi faible des grands nombres fournit :

$$\frac{1}{n} \log |||\Psi_n||| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log |M_i| \xrightarrow{(\mathbb{P})} \mathbb{E}[\log |M_1|] \quad (3)$$

ce log étant bien défini car les matrices sont prises inversibles. Ainsi, dans ce cas, $l(\mu) = \mathbb{E}[\log |M_1|]$. Ce théorème est donc une extension du la loi faible des grands nombres au cas de matrices aléatoires.

Par ailleurs, dans le cas limite où S est un singleton $\{M\}$ (c'est-à-dire que Ψ_n peut être assimilé au produit déterministe M^n), le théorème de Gelfand affirme que $l(\mu)$ est le logarithme du rayon spectral de M .

(i). Remarquons que ce terme est presque sûrement bien défini car les (M_i) sont inversibles.

Un premier lemme probabiliste

Toute notre démonstration va s'axer autour du lemme suivant :

Lemme 1. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles presque sûrement dans $[a, b]$. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que :

1. $\mathbb{E}[X_n] \rightarrow l$

2. $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(X_n \geq l + \varepsilon) \rightarrow 0$

Alors (X_n) converge vers l dans L^1 .

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$A_n := (|X_n - l| \leq \varepsilon) \quad (4)$$

On a alors :

$$\mathbb{E}[|X_n - l|] = \mathbb{E}[|X_n - l| \mathbb{1}_{A_n}] + \mathbb{E}[|X_n - l|(1 - \mathbb{1}_{A_n})] \quad (5)$$

$$\leq \varepsilon + \mathbb{E}[(X_n - l)_+(1 - \mathbb{1}_{A_n})] + \mathbb{E}[(X_n - l)_-(1 - \mathbb{1}_{A_n})] \quad (ii) \quad (6)$$

Or, pour $\omega \in \Omega$, si $(X_n(\omega) - l)_+(1 - \mathbb{1}_{A_n}(\omega)) \neq 0$, on a $\omega \in \bar{A}_n \cap (X_n \geq l)$, c'est-à-dire $X_n(\omega) \geq l + \varepsilon$. On peut donc majorer :

$$0 \leq \mathbb{E}[(X_n - l)_+(1 - \mathbb{1}_{A_n})] \leq (b - l)_+ \mathbb{P}(X_n \geq l + \varepsilon) \quad (7)$$

et donc par hypothèse ce terme tend vers 0. Enfin, observons :

$$0 \leq \mathbb{E}[(X_n - l)_-(1 - \mathbb{1}_{A_n})] = \mathbb{E}[(X_n - l)_+(1 - \mathbb{1}_{A_n})] - \mathbb{E}[(X_n - l)] + \mathbb{E}[(X_n - l) \mathbb{1}_{A_n}] \quad (8)$$

$$\leq \varepsilon + o(1) \quad (9)$$

en majorant $(X_n - l) \mathbb{1}_{A_n}$ par ε et en utilisant l'hypothèse de convergence en espérance et la domination précédemment faite. En rassemblant tous les morceaux, on obtient :

$$\mathbb{E}[|X_n - l|] \leq (1 + (b - l)_+) \varepsilon + o(1) \quad (10)$$

et donc en passant à la limite supérieure quand $[\varepsilon \rightarrow 0]$, on obtient bien :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[|X_n - l|] = 0 \quad (11)$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

Il suffit donc de démontrer séparément la convergence en espérance vers une constante réelle $l(\mu)$ puis que pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \log ||\psi_n|| \geq l(\mu) + \varepsilon\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad (12)$$

(ii). Lorsque f est une fonction réelle, on note respectivement par f_+ et f_- ses parties positives et négatives.

Convergence en espérance

Montrons désormais l'existence d'une constante $l(\mu) \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\frac{1}{n} \mathbb{E}[\log |||\Psi_n|||] \rightarrow l(\mu) \quad (13)$$

Pour cela, nous utiliserons le classique lemme sous-additif de Fekete.

Définition 1 (Suite sous-additive). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que (u_n) est sous-additive si :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, u_{n+m} \leq u_n + u_m \quad (14)$$

Lemme 2 (Fekete). Soit (u_n) une suite sous-additive. Alors, la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ est convergente dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{u_n}{n} \quad (15)$$

Ainsi, il suffit de montrer que la suite $(\mathbb{E}[\log |||\Psi_n|||])$ est sous-additive.

Soit $n, m \in \mathbb{N}^{*2}$. Alors :

$$\mathbb{E}[\log |||\Psi_{n+m}|||] \leq \mathbb{E}[\log |||\prod_{i=1}^n M_i|||] + \mathbb{E}[\log |||\prod_{i=n+1}^{n+m} M_i|||] \quad (16)$$

$$= \mathbb{E}[\log |||\Psi_n|||] + \mathbb{E}[\log |||\Psi_m|||] \quad (17)$$

La majoration exploite la sous-multiplicativité des normes d'opérateur et la croissance du log et l'espérance. La deuxième égalité n'est pas triviale ! Elle vient du fait que les (M_i) sont i.i.d., et donc qu'on a l'égalité en loi :

$$\prod_{i=n+1}^{n+m} M_i \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \Psi_m \quad (18)$$

La suite $(\mathbb{E}[\log |||\Psi_n|||])$ est donc sous-additive. En vertu du lemme de Fekete, $\left(\frac{1}{n} \mathbb{E}[\log |||\Psi_n|||]\right)$ converge vers son infimum.

Il reste à montrer que $l(\mu) \in \mathbb{R}$, ce que l'on peut montrer en prouvant que la suite $\left(\frac{1}{n} \log |||\Psi_n|||\right)$ est minorée. Pour cela prouvons d'abord :

Lemme 3. $\exists \alpha > 0 : \forall M \in S, \forall x \in \mathbb{C}^d, ||Mx|| \geq \alpha ||x||$

Démonstration. C'est une conséquence de la compacité du support S . En effet, en notant $S(0, 1)$ la sphère unité de $\mathbb{C}^d$ (compact), on peut considérer l'application :

$$\begin{aligned} S \times S(0, 1) &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ (M, x) &\mapsto ||Mx|| \end{aligned}$$

qui est clairement continue. Son image est donc un compact de $\mathbb{R}_+^*$, de la forme $[\alpha, \beta]$. C'est-à-dire que pour tout $M \in S$ et pour tout $X \in \mathbb{C}^d$, on a :

$$||Mx|| \geq \alpha ||x|| \quad (19)$$

□

On peut désormais appliquer le lemme :

$$\forall x \in \mathbb{C}^d, ||\Psi_n x|| = ||\prod_{i=1}^n M_i x|| \quad (20)$$

$$\geq \alpha^n ||x|| \quad (21)$$

et donc :

$$|||\Psi_n||| \geq \alpha^n \quad (22)$$

Il vient donc immédiatement :

$$\frac{1}{n} \log |||\Psi_n||| \geq \log(\alpha) > 0 \quad (23)$$

Convergence des probabilités

La dernière chose à faire pour obtenir le théorème est de montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P} \left(\frac{1}{n} \log |||\Psi_n||| \geq l(\mu) + \varepsilon \right) \rightarrow 0 \quad (24)$$

et d'ensuite lui appliquer le lemme 1.

On commence par découper le produit Ψ_n pour faire apparaître des variables aléatoires réelles i.i.d. Soit $k_0 \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut faire la division euclidienne :

$$n = qk_0 + r \quad (25)$$

$$0 \leq r < k_0 \quad (26)$$

On peut alors écrire :

$$\frac{1}{n} \log |||\Psi_n||| \leq \frac{1}{n} \left[\sum_{i=0}^{q-1} \log ||| \prod_{j=ik_0+1}^{(i+1)k_0} M_j ||| + \log ||| \prod_{j=qk_0+1}^n M_j ||| \right] \quad (27)$$

par sous-multiplicativité de la norme d'opérateur. Posons alors :

$$Q_i^{(k_0)} := \log ||| \prod_{j=ik_0+1}^{(i+1)k_0} M_j ||| \quad (28)$$

$$R^{(k_0)} := \log ||| \prod_{j=qk_0+1}^n M_j ||| \quad (29)$$

Par indépendance des (M_i) et égalité en loi, on a :

$$\forall i \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket, Q_i^{(k_0)} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \log |||\Psi_{k_0}||| \quad (30)$$

Or les $(Q_i^{(k_0)})$ sont des variables L^1 car bornées, indépendantes et identiquement distribuées. D'après la loi forte des grands nombres :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{q-1} Q_i^{(k_0)} = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} \frac{q}{n} Q_i^{(k_0)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \frac{1}{k_0} \mathbb{E}[\log |||\Psi_{k_0}|||] \quad (31)$$

Il est par ailleurs clair que $\frac{1}{n} R^{(k_0)}$ converge presque sûrement vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\mathbb{P} \left(\frac{1}{n} \log |||\Psi_n||| \geq l(\mu) + \varepsilon \right) \leq \mathbb{P} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{q-1} Q_i^{(k_0)} + \frac{1}{n} R^{(k_0)} \geq l(\mu) + \varepsilon \right) \quad (32)$$

$$\leq \mathbb{P} \left(\left[\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{q-1} Q_i^{(k_0)} - \frac{1}{k_0} \mathbb{E}[\log |||\Psi_{k_0}|||] \right] + \left[\frac{1}{k_0} \mathbb{E}[\log |||\Psi_{k_0}|||] - l(\mu) \right] + \frac{1}{n} R^{(k_0)} \geq \varepsilon \right) \quad (33)$$

Il suffit maintenant de choisir k_0 de sorte à ce que :

$$\frac{1}{k_0} \mathbb{E}[\log |||\Psi_{k_0}|||] - l(\mu) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (34)$$

ce qui est possible grâce à la convergence en espérance précédemment établie. On domine alors notre probabilité par :

$$\mathbb{P} \left(\left[\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{q-1} Q_i^{(k_0)} - \frac{1}{k_0} \mathbb{E}[\log |||\Psi_{k_0}|||] \right] + \frac{1}{n} R^{(k_0)} \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) \quad (35)$$

et ce dernier terme tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ car le terme de gauche tend presque sûrement vers 0.

On peut donc appliquer le lemme 1 pour obtenir le théorème !

Développement librement inspiré du sujet « Mathématiques D » du concours d'entrée 2021 de l'ENS Paris.

Références

- [1] *Mathématiques D (concours de l'ENS Paris)*. 2021. URL : https://www.ens.psl.eu/sites/default/files/21_mp_sujet_mathd.pdf.