Voici le lien vers la vidéo d'explication : YouTube – Vidéo

Difficulté : 2.5/4. Ref Rombaldi algèbre tout en un, pour la décomposition polaire et Tauvel Exercices d'algèbre générale pour l'Agrégation : 470 exercices corrigés, pour l'application

Leçon	**Intitulé**	**Note /5**	**Pourquoi ce dev y rentre**
106	Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications.	$(\star\star\star\star)$	Conjugaison par un élément orthogonal dans $GL_n(\mathbb{R})$; comparaison des conjugaisons unitaire vs orthogonale, action par conjugaison sur les matrices réelles.
150	Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme. Applications.	$(\star\star\star)$	$P = \sqrt{M^\top M}$ est obtenu par calcul fonctionnel polynomial : $P = p(M^\top M)$. Lien direct avec polynômes annulateurs/minimal, réduction de Dunford et propriétés de l'algèbre engendrée (commutation B avec $p(A)$).
157	Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes	$(\star\star\star\star\star)$	Utilise que $M^\top M$ est SPD, existence/unicité de la racine carrée P et théorème spectral ; rôle du groupe orthogonal et des formes quadratiques.
158	Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien	$(\star\star\star\star)$	Appui sur la diagonalisation des symétriques (spectral réel) et propriétés des familles commutantes pour la construction/ unicité de P.

Théorème : Décomposition Polaire

Théorème 1. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle inversible. Il existe un unique couple de matrices (O, P) tel que :

$$M = OP$$

où $O \in O_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale et $P \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive. P est un polynôme en M^TM

Démonstration.

1. Existence de la décomposition

Si $M = OP$, $M^TM = PO^TOP = P^2$.

Considérons la matrice $A = M^TM$.

- **A est symétrique :** $A^T = (M^TM)^T = M^T(M^T)^T = M^TM = A$.
- **A est définie positive :** Soit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Alors $v^TAv = v^TM^TMv = (Mv)^T(Mv) = \|Mv\|^2$. Comme M est inversible et $v \neq 0$, on a $Mv \neq 0$, et donc $\|Mv\|^2 > 0$.

Puisque A est une matrice symétrique réelle définie positive, elle admet une unique racine carrée symétrique définie positive, que nous noterons P, de plus P est un polynôme en M^TM. On a donc $P^2 = A = M^TM$.

Définissons maintenant la matrice O par $O = MP^{-1}$. Il nous reste à montrer que O est orthogonale.

$$O^TO = (MP^{-1})^T(MP^{-1}) = (P^{-1})^TM^TMP^{-1}$$

Comme P est symétrique, son inverse P^{-1} l'est aussi, donc $(P^{-1})^T = P^{-1}$.

$$O^TO = P^{-1}(M^TM)P^{-1} = P^{-1}(P^2)P^{-1} = (P^{-1}P)(PP^{-1}) = I_n$$

La matrice O est bien orthogonale. Nous avons donc construit un couple (O, P) tel que $M = OP$, ce qui prouve l'existence.

2. Unicité de la décomposition

Supposons qu'il existe une autre décomposition $M = O'P'$ avec O' orthogonale et P' symétrique définie positive. Calculons $M^T M$ en utilisant cette nouvelle décomposition :

$$M^T M = (O'P')^T (O'P') = (P')^T (O')^T O'P'$$

Comme O' est orthogonale, $(O')^T O' = I_n$. Comme P' est symétrique, $(P')^T = P'$.

$$M^T M = P' I_n P' = (P')^2$$

Nous avons donc $(P')^2 = M^T M = P^2$. Or, la racine carrée d'une matrice symétrique définie positive est unique. Par conséquent, $P' = P$.

Ensuite, de $M = OP$ et $M = O'P$, nous déduisons $OP = O'P$. Comme P est inversible, on peut multiplier à droite par P^{-1} pour obtenir $O = O'$. L'unicité du couple (O, P) est donc démontrée. ∎

Théorème 1. *Pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice symétrique positive S et une matrice orthogonale $O \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $M = SO$.*

Démonstration. La démonstration repose sur l'approximation de la matrice M par une suite de matrices inversibles et l'utilisation de la compacité du groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$.

1. Approximation de M par une suite de matrices inversibles. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Considérons la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$A_k = M + \frac{1}{k} I_n$$

Le polynôme caractéristique de M, $\det(M - \lambda I_n)$, n'a qu'un nombre fini de racines. Il existe donc un rang K tel que pour tout $k > K$, $-\frac{1}{k}$ n'est pas une valeur propre de M. Pour ces k, on a $\det(A_k) = \det(M - (-\frac{1}{k})I_n) \neq 0$.

La suite $(A_k)_{k>K}$ est donc une suite de matrices inversibles dans $GL_n(\mathbb{R})$. De plus, cette suite converge vers M :

$$\lim_{k\to\infty} A_k = M$$

2. Décomposition polaire de la suite (A_k). Pour chaque $k > K$, A_k est inversible et admet donc une décomposition polaire **unique** :

$$A_k = S_k O_k$$

où S_k est une matrice symétrique *définie* positive et O_k est une matrice orthogonale ($O_k \in O_n(\mathbb{R})$).

3. Utilisation de la compacité de $O_n(\mathbb{R})$. Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I_n\}$ est une partie fermée et bornée de $M_n(\mathbb{R})$, c'est donc un **compact**.

La suite $(O_k)_{k>K}$ est une suite d'éléments du compact $O_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(O_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une matrice O.

$$\lim_{j\to\infty} O_{k_j} = O$$

Comme $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé, la limite O de cette suite de matrices orthogonales est elle-même une matrice **orthogonale** : $O \in O_n(\mathbb{R})$.

4. Convergence de la suite des matrices symétriques. Considérons la sous-suite correspondante (S_{k_j}). On peut l'exprimer ainsi :

$$S_{k_j} = A_{k_j} O_{k_j}^{-1} = A_{k_j} {}^t O_{k_j}$$

Nous connaissons la limite de chaque terme du produit :
- $\lim_{j\to\infty} A_{k_j} = M$ (car la suite mère (A_k) converge vers M).
- $\lim_{j\to\infty} {}^t O_{k_j} = {}^t O$ (car la transposition est une application continue).

La suite (S_{k_j}) converge donc vers une limite S :

$$S = \lim_{j\to\infty} S_{k_j} = M {}^t O$$

5. Propriétés de la matrice limite S.
- **Symétrie :** Chaque matrice S_{k_j} est symétrique. L'ensemble des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$, il est donc fermé. Par conséquent, la limite S d'une suite de matrices symétriques est elle-même **symétrique**.
- **Positivité :** Chaque S_{k_j} est symétrique définie positive. Pour tout vecteur non nul $X \in \mathbb{R}^n$, on a donc ${}^t X S_{k_j} X > 0$. En passant à la limite (qui est compatible avec les inégalités larges), on obtient :

  $$ {}^t X S X = {}^t X \left(\lim_{j\to\infty} S_{k_j} \right) X = \lim_{j\to\infty} ({}^t X S_{k_j} X) \geq 0$$

  La matrice S est donc **symétrique positive** (ou semi-définie positive).

Conclusion. En passant à la limite dans l'égalité $A_{k_j} = S_{k_j} O_{k_j}$, on obtient :

$$\lim_{j\to\infty} A_{k_j} = \left(\lim_{j\to\infty} S_{k_j} \right) \left(\lim_{j\to\infty} O_{k_j} \right)$$
$$M = SO$$

Nous avons ainsi démontré l'existence de la décomposition pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$. $\square$

Exercice 1. Soit deux matrices réelles $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $U \in \mathcal{U}(n, \mathbb{C})$ une matrice unitaire, telles que $A = UBU^{-1}$. Montrer en utilisant la décomposition polaire dans $\mathbb{R}$ qu'il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$, une matrice orthogonale, telle que $A = OBO^{-1}$.

Démonstration.

1. **Passage du complexe au réel :** La relation $A = UBU^{-1}$ est équivalente à $AU = UB$. Décomposons U en ses parties réelle et imaginaire : $U = X + iY$ où $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'équation devient $A(X + iY) = (X + iY)B$. En séparant les parties réelles et imaginaires (car A et B sont réelles), on obtient deux équations matricielles réelles :

$$AX = XB \quad \text{et} \quad AY = YB$$

2. **Construction d'une matrice réelle inversible M :** Puisque U est unitaire, elle est inversible, donc $\det(U) \neq 0$. Le polynôme $p(t) = \det(X + tY)$ en la variable réelle t n'est pas identiquement nul. Il existe donc une valeur $t_0 \in \mathbb{R}$ telle que $p(t_0) \neq 0$. Posons $M = X + t_0Y$. M est une matrice réelle inversible. De plus :

$$AM = A(X+t_0Y) = AX+t_0AY = XB+t_0YB = (X+t_0Y)B = MB$$

   On a donc la relation clé : $AM = MB$.

3. **Application de la décomposition polaire :** M étant une matrice réelle inversible, on peut la décomposer de manière unique en $M = OP$, où O est orthogonale et P est symétrique définie positive. La relation $AM = MB$ devient $A(OP) = (OP)B$.

4. **Commutativité de P et B :** C'est l'étape cruciale. Nous devons montrer que $PB = BP$. De $A = UBU^{-1}$, on tire $A^T = (UBU^{-1})^* = UB^TU^{-1}$. Ceci mène, par un raisonnement identique à l'étape 1, à la relation $A^TM = MB^T$. En transposant, on obtient $M^TA = (MB^T)^T = BM^T$. Considérons $P^2 = M^TM$.

$$P^2B = (M^TM)B = M^T(MB)$$

En utilisant $MB = AM$, on a :

$$P^2B = M^T(AM) = (M^TA)M$$

En utilisant $M^TA = BM^T$, on a :

$$P^2B = (BM^T)M = B(M^TM) = BP^2$$

Donc P^2 commute avec B. Comme P est l'unique racine carrée symétrique définie positive de P^2, P est un polynôme en P^2. Par conséquent, B commute également avec P :

$$PB = BP$$

5. **Conclusion :** Reprenons l'équation $A(OP) = (OP)B \implies AOP = OPB$. Grâce à la commutativité que nous venons de démontrer, $OPB = OBP$. L'équation devient $AOP = OBP$. Puisque P est inversible, on peut multiplier à droite par P^{-1} :

$$AO = OB$$

Enfin, O étant orthogonale, son inverse est O^{-1}. On multiplie à droite par O^{-1} :

$$A = OBO^{-1}$$

Nous avons bien trouvé une matrice orthogonale réelle O qui conjugue B en A.

■

Théorème 2 (Racine carrée symétrique positive et calcul polynomial)**.** Soit $M \in S_n^+(\mathbb{R})$. Il existe une unique matrice $P \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $P^2 = M$. De plus, P est un polynôme en M.

Démonstration. **(Existence).** Par théorème spectral, il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i \geq 0$ telles que

$$M = Q\,\Lambda\,Q^\top.$$

Posons $\sqrt{\Lambda} := \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ (avec $\sqrt{0} = 0$) et

$$P := Q\,\sqrt{\Lambda}\,Q^\top.$$

Alors P est symétrique et à spectre positif, donc $P \in S_n^+(\mathbb{R})$, et

$$P^2 = (Q\sqrt{\Lambda}Q^\top)(Q\sqrt{\Lambda}Q^\top) = Q\,\sqrt{\Lambda}\,\sqrt{\Lambda}\,Q^\top = Q\,\Lambda\,Q^\top = M.$$

Cela montre l'existence.

(Unicité dans S_n^+). Soit $X \in S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $X^2 = M$. Écrivons encore $M = Q\Lambda Q^\top$ et posons $Y := Q^\top X Q$, qui est symétrique positive. Alors

$$Y^2 = Q^\top X^2 Q = Q^\top M Q = \Lambda.$$

Soit $\mu \geq 0$ une valeur propre de Λ et E_μ le sous-espace propre associé (dimension égale à la multiplicité de μ). La relation $Y^2 = \Lambda$ implique $(Y^2)_{|E_\mu} = \mu\, I$ sur E_μ. Comme Y est symétrique, $Y_{|E_\mu}$ est diagonalisable à valeurs propres dans $\{\pm\sqrt{\mu}\}$. La positivité de Y force ces valeurs propres à être $\sqrt{\mu}$ (et non $-\sqrt{\mu}$). Ainsi $Y_{|E_\mu} = \sqrt{\mu}\, I$. Donc $Y = \sqrt{\Lambda}$ sur chaque E_μ, i.e. $Y = \sqrt{\Lambda}$. On en déduit $X = QYQ^\top = Q\sqrt{\Lambda}Q^\top = P$. L'unicité dans S_n^+ est établie.

(La racine carrée est un polynôme en M). Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les *valeurs propres distinctes* de M (toutes ≥ 0). Par interpolation de Lagrange, il existe un polynôme $p \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$p(\lambda_j) = \sqrt{\lambda_j} \qquad (1 \leq j \leq r).$$

Alors, par calcul fonctionnel polynomial,

$$p(M) = Q\,p(\Lambda)\,Q^\top = Q\,\mathrm{diag}\big(p(\lambda_1), \ldots, p(\lambda_n)\big)\,Q^\top = Q\,\sqrt{\Lambda}\,Q^\top = P.$$

Ainsi $P = p(M)$ est un polynôme en M.

Cela prouve existence, unicité dans S_n^+ et le fait que la racine carrée est polynomiale en M. $\square$