Structure des polynomes symétriques

<u>Thm</u>: Soit A un anneau (commutatif unitaire). Pour tout polynome symétrique $P \in A[X_1, \dots, X_n]$ de degré d, il existe un unique $Q \in A[X_1, \dots, X_n]$ tel que $P(X_1, \dots, X_n) = Q(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n)$. De plus $\pi(Q) \leq d$.

<u>Notations</u>: • $\pi(X^\nu) = \sum_{k=1}^{n} k \nu_k$ est le poids d'un monôme, $\pi(Q)$ est le max des poids de ses monomes. $d^\circ Q \leq \pi(Q)$

• Si $p \in [\![1, n]\!]$, $\Sigma_p = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} X_{i_1} \cdots X_{i_p}$

• <u>lemme</u>: Soit $P \in A[X]$, symétrique tel que $P(X_1, \dots, X_{n-1}, 0) = 0$. Alors $X_1 \cdots X_n = \Sigma_n$ divise P

• Par récurrence sur $n \geq 1$. Si $n = 1$ le résultat est clair.

↳ On suppose vraie la propriété au rang $n-1$.

écrivons $P(X_1, \dots, X_n) = P_0 + X_n P_1 + \dots + P_r X_n^r$ (r

où les $P_i \in A[X_1, \dots, X_{n-1}]$. On a $P_0 = 0$

P symétrique $\Rightarrow P(X_1, \dots, X_{n-2}, 0, X_n) = 0$

$\Rightarrow \forall i = 1 \dots r, \ P_i(X_1, \dots, X_{n-2}, 0) = 0$ et par hyp. de récurrence, $\forall i = 1 \dots r$, $X_1 \cdots X_{n-1}$ divise P_i.

enfin: $P_0 = 0 \Rightarrow X_1 \cdots X_n$ divise P. □

• <u>Existence</u>: Soit, pour $n \geq 1$ et $d \geq 0$, $H(n, d)$ la propriété :
" $\forall P \in A[X_1, \dots, X_n]$ symétrique de degré d, il existe $Q \in A[X_1, \dots, X_n]$ tel que $\pi(Q) \leq d$ et $P(X_1, \dots, X_n) = Q(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n)$ "

et soit $U(n)$: " $\forall d \in \mathbb{N}$, $H(n, d)$ est vraie ".

• Montrons que $\forall n \geq 1$, $U(n)$ est vraie par récurrence sur n.

↳ si $n = 1$, c'est clair avec $P = Q$.

↳ Supposons $n \geq 2$, $U(n-1)$ vraie et Montrons $\forall d \in \mathbb{N}$, $H(n, d)$ vraie par récurrence sur d. Le cas $d = 0$ est clair.

↳ Supposons $H(n, l)$ vraie pour tout $l < d$. (*)

- Soit $P \in A[X_1, \dots, X_n]$ de degré d, symétrique. $P(X_1, \dots, X_{n-1}, 0)$ est symétrique, de degré $\leq d$, donc par $U(n-1)$, $\exists Q_1 \in A[X_1, \dots, X_{n-1}]$ avec $\pi(Q_1) \leq d$ et $P(X_1, \dots, X_{n-1}, 0) = Q_1(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$ où les $(\sigma_i)_{i=1}^{n-1}$ sont les f° symétriques d'ordre $n-1$.
- $d^\circ Q_1(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) \leq \pi(Q_1) \leq d$. Soit

$P_1(X_1, \dots, X_n) = P(X_1, \dots, X_n) - Q_1(\Sigma_1, \dots, \Sigma_{n-1})$

$P_1(X_1, \dots, X_{n-1}, 0) = 0$ et P_1 est symétrique : via le lemme : $\Sigma_n \mid P_1$.

- Σ_n n'est pas un diviseur de zéro donc si $P_1 = \Sigma_n P_2$, P_2 est symétrique. de plus $d^\circ P_2 \leq d-n$ car $d^\circ P_1 \leq d$.

Via (*) $H(n, d-n)$, $\exists Q_2 \in A[X]$, $\pi(Q_2) \leq d-n$

et $P(X_1, \dots, X_n) = Q_1(\Sigma_1, \dots, \Sigma_{n-1}) + Q_2(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n)\Sigma_n$

avec $Q = Q_1 + Q_2 X_n$ qui est de poids au plus d. fin de l'existence.

- Unicité : si $n \geq 1$:

Soit $V(n)$: " $P \in A[X_1, \dots, X_n] \longmapsto P(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n)$ est injective "

Montrons $\forall n \geq 1$, $V(n)$ par récurrence sur n.

- si $n = 1$, c'est clair. Supposons $V(n-1)$ avec $n \geq 2$.
- Par l'absurde $\exists P \in A[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$, $P(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n) = 0$ et prenons le de degré minimal pour cette propriété.

Écrivons $P = P_0 + P_1 X_n + \dots + P_r X_n^r$

où $\forall i = 0 \dots r$, $P_i \in A[X_1, \dots, X_{n-1}]$

↳ si $P_0 = 0$, $P = X_n Q$ avec $\begin{cases} Q \neq 0 \\ Q(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n) = 0 \end{cases}$

et $d^\circ Q < d^\circ P$ absurde

↳ si $P_0 \neq 0$, on a : $P_0(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) = \begin{cases} P(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n) = 0 \\ \text{avec } X_n = 0 \end{cases}$

par $V(n-1)$, c'est absurde.