Voir la vidéo sur YouTube

Leçon 250 :Transormée de Fourier. Applications.

Cadre : On se place dans le cadre des fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^d$ (le plus souvent $d=1$), à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et des espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^d)$.

1. Convolution [LI]. —

1.1. *Définition et cas d'existence.* —

–

Définition **(Produit de convolution, [1, p.80]).** —] Soient f et g deux fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^d$. Sous réserve d'existence, leur produit de convolution est la fonction $f*g$ définie pour $x \in \mathbb{R}^d$ par :

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)dt \tag{1}$$

–

Théorème 1 **(Cas $L^1 \times L^1$ – Thm III.1.7, [1, p.81]).** — *] Si f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $(f*g)(x)$ existe pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, et la fonction $f*g$ est dans $L^1(\mathbb{R})$. De plus, on a l'inégalité de Young :*

$$\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1 \tag{2}$$

–

Théorème 2 **(Cas $L^1 \times L^\infty$ – Thm III.1.6, [1, p.80])**

] Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, alors $(f*g)(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f*g$ est continue, bornée sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_1\|g\|_\infty \tag{3}$$

1.2. *Propriétés de continuité.* —

– ***Théorème 3*** **(Continuité de la translation – Thm III.1.4, [1, p.77])**
] Soit $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$. On pose $f_x(t) = f(t-x)$. Alors l'application $\tau : \mathbb{R} \to L^p(\mathbb{R})$, $x \mapsto f_x$ est uniformément continue.

– ***Théorème 4*** **(Continuité de la convolée – Thm III.1.1, [1, p.78])**
] Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p,q \leq \infty$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, alors $f*g$ est une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

1.3. *Régularisation et approximation par convolution.* —

– ***Définition*** **(Approximation de l'unité – Déf III.1.10, [1, p.83])**
] On appelle approximation de l'unité (ou suite régularisante) une famille de fonctions $(\rho_a)_{a>0}$ de $L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que :
(a) $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_a(t)dt = 1$ pour tout $a > 0$.
(b) Il existe $M > 0$ tel que $\int_{\mathbb{R}^d} |\rho_a(t)|dt \leq M$ pour tout $a > 0$.
(c) Pour tout voisinage V de 0, $\lim_{a\to 0} \int_{\mathbb{R}^d \setminus V} |\rho_a(t)|dt = 0$.

– ***Théorème 5*** **(Théorème d'approximation – Thm III.1.9, [1, p.82])**
] Soit $(\rho_a)_{a>0}$ une approximation de l'unité.
- *Si $g \in C_c(\mathbb{R})$, on a $\lim_{a\to 0}\|g*\rho_a - g\|_\infty = 0$.*
- *Pour $1 \leq r < \infty$ et $f \in L^r(\mathbb{R})$, on a $\lim_{a\to 0}\|f*\rho_a - f\|_r = 0$.*

2. Transformée de Fourier dans L¹ [LI]. —

2.1. *Définition et propriétés fondamentales.* —

– ***Définition 1*** **(Transformée de Fourier (Déf III.2.1))**
Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier est la fonction $\hat{f}$ (ou $\mathscr{F}f$) définie pour $y \in \mathbb{R}$ par :

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi xy}dx \tag{4}$$

– ***Théorème 6*** **(Théorème III.2.2).** — *L'application transformée de Fourier envoie $L^1(\mathbb{R})$ dans l'espace $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini.*

–

Théorème 7 **(Théorème de convolution (Thm III.2.3))**
Pour toutes fonctions $f,g \in L^1(\mathbb{R})$, on a : $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$.

2.2. *Propriétés opérationnelles.* —

– ***Proposition*** **(Transformée de Fourier et dérivation, exercice 11, chap III)**
- Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $x \mapsto xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ est C^1 et $(\hat{f})' = -\widehat{2i\pi x f}(x)$.
- Si f est C^1 avec $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f'}(y) = 2i\pi y\hat{f}(y)$.

–

Corollaire 1 **(Corollaire III.2.4).** — *L'algèbre $L^1(\mathbb{R})$ n'a pas d'unité pour la convolution.*

Exemple 1 **(Exemples de transformées).** —
– ***Gaussienne :*** *Soit $f(x) = e^{-\pi x^2}$. Alors $\hat{f}(y) = e^{-\pi y^2}$.*
– ***Cauchy :*** *Soit $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, alors $\hat{f}(y) = e^{-2\pi|y|}$.*
– ***Exponentielle :*** *Soit $f(x) = e^{-|x|}$. Alors $\hat{f}(y) = \dfrac{2}{1+(2\pi y)^2}$.*

2.3. *Exemples et théorèmes d'inversion.* —

Théorème 8 **(Théorème d'inversion (Thm III.2.6)).** — *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors f est égale p.p. à la fonction continue g définie par :*

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{2i\pi xy} dy \tag{5}$$

Autrement dit, sous ces conditions, $f = \mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F} f)$.

Lemme 1 **(Lemme préparatoire (Lemme III.2.8)).** — *Soit $P \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\hat{P}$ soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. Pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a :*

$$(f * P_a)(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{2i\pi xy} P(ay) dy, \quad \forall \in \mathbb{R} \tag{6}$$

Théorème 9 **(Injectivité (Théorème III.2.7)).** — *La transformation de Fourier $\mathscr{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ est injective.*

3. Fonctions caractéristiques et convergence en loi [CHABANOL chap 43-46, 57]. —

3.1. *Fonction caractéristique d'une variable aléatoire.* —

–

Définition 2 **(Fonction Caractéristique (Déf 21)).** — Si X est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, sa fonction caractéristique est $\Phi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ définie par $\Phi_X(t) = \mathbb{E}[\exp(it \cdot X)]$.

–

Proposition 1 **(Propriétés Élémentaires).** —
- ***(Prop 22)** Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\Phi_{aX+b}(t) = e^{itb}\Phi_X(at)$.*
- ***(Prop 23)** Si la loi de X est symétrique, $\Phi_X(t)$ est réelle.*
- ***(Prop 24)** Si $\mathbb{E}[|X|^k] < \infty$, alors Φ_X est k fois dérivable à l'origine et $\Phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$.*

–

Proposition 2 **(Indépendance (Prop 26)).** — *Deux v.a. réelles X et Y sont indépendantes si et seulement si la fonction caractéristique de leur couple est le produit de leurs fonctions caractéristiques, i.e. $\Phi_{(X,Y)}(s,t) = \Phi_X(s)\Phi_Y(t)$. Ceci implique que si X et Y sont indépendantes, $\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t)$.*

–

Exemple 2 **(Somme de deux gaussiennes).** — *Soient $X_1 \sim N(m_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \sim N(m_2, \sigma_2^2)$ deux v.a. indépendantes. On a $\Phi_{X_i}(t) = \exp(itm_i - \sigma_i^2 t^2/2)$. Par indépendance : $\Phi_{X_1+X_2}(t) = \Phi_{X_1}(t)\Phi_{X_2}(t) = \exp(it(m_1+m_2) - (\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2/2)$. On reconnaît la f.c. d'une loi $N(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.*

3.2. *Convergence en loi.* —

–

Proposition 3 **(Formule d'inversion (Prop 25)).** — *Si $\Phi_X \in L^1(\mathbb{R})$, alors X admet une densité continue f donnée par $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \Phi_X(t) e^{-itx} dt$.*

–

Définition 3 **(Convergence en loi (Déf 16)).** — Une suite de v.a. (X_n) converge en loi vers X, noté $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$, si pour toute fonction continue bornée ϕ, on a $\mathbb{E}[\phi(X_n)] \to \mathbb{E}[\phi(X)]$.

–

Théorème 10 **(Théorème de Lévy (Théorème 17))**

Soit (X_n) une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. La suite converge en loi vers X si et seulement si la suite des fonctions caractéristiques Φ_{X_n} converge simplement vers la fonction caractéristique Φ_X.

September 9, 2025