28 Leçon 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.

Cadre

I. Formes bilinéaires et formes quadratiques [ROM]
Forme bilinéaire, matrice, symétrique, matrice de passage, rang, discriminant, forme quadratique, forme polaire, exemple

II. Orthogonalité et isotropie [ROM] [GRI]
Vecteurs orthogonaux, prop, vecteur isotrope, noyau, forme non dégénérée, forme définie, contre-exemple, égalité avec l'orthogonal

III. Réduction et classification des formes quadratiques

1. Réduction de Gauss [ROM] [GRI]
Théorème de réduction de Gauss, méthode, exemples, base q-orthogonale

2. Classification sur $\mathbb{C}$ [GRI]
Théorème de classification, existence de q-BON ssi $\mathrm{rg}(q) = n$

3. Classification sur $\mathbb{R}$ [ROM] [GRI]
Forme positive-définie positive, inégalité de Cauchy-Schwarz, DEV 1 : théorème de Sylvester, signature, exemple

IV. Applications

1. Un exemple sur $M_n(\mathbb{R})$: la trace [ROM]
DEV 2 : $\mathrm{Tr}(M^2)$ est une forme quadratique, corollaires

2. Groupe orthogonal associé à q [GRI]
Adjoint d'un endomorphisme, endomorphisme orthogonal, groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal, écriture matricielle

Présentation :

- Etudier une forme quadratique est équivalent à étudier sa forme polaire, on peut donc jongler entre ces deux notions en fonction du contexte.
- Pour des formes quadratiques, on a pas forcément que $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ (prendre un vecteur isotrope).
- Une forme quadratique définie positive défini un produit scalaire : si l'on dispose d'une telle forme quadratique, alors E est un espace euclidien.
- Sur $\mathbb{C}$, on peut classifier les formes quadratiques uniquement grâce au rang.

Développements :

- Loi d'inertie de Sylvester
  - Algèbre, Gourdon, p243
  - Algèbre linéaire, Grifone, p307
- $\mathrm{Tr}(M^2)$ est une forme quadratique
  - Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi, p491

Références :

- [ROM] Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi
- [GRI] Algèbre linéaire, Grifone

Leçon 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.

Rom 461 Soit K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et E un K-espace-vectoriel de dimension $n \geq 2$.

I Formes bilinéaires et formes quadratiques [ROM]

om 61 **Déf 1 :** Une forme bilinéaire sur E est une application $\ell : E \times E \to K$, $(x,y) \mapsto \ell(x,y)$ telle que, $\forall x, y \in E$, les applications $z \mapsto \ell(x,z)$ et $z \mapsto \ell(z,y)$ sont linéaires.

Une forme bilinéaire est dite symétrique si $\ell(y,x) = \ell(x,y)$ $\forall x,y \in E$.

om 164 **Exemple 2 :** Sur $\mathbb{R}^2$, $\ell(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ et $\varphi(x,y) = x_1 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_2$ sont des formes bilinéaires.

om 162 Soit $\beta = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ on lui associe le vecteur colonne $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in K^n$.

Déf 3 : La matrice d'une forme bilinéaire ℓ dans la base β de E est donnée par $A = (\ell(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$.

Prop 4 : On a : $\ell(x,y) = X^T A Y$.

Prop 5 : Une forme bilinéaire est symétrique ssi sa matrice dans une base quelconque est symétrique.

Théorème 6 : Soit β_1 et β_2 deux bases de E et P la matrice de passage de β_1 à β_2. Soit $A_1 = \mathrm{Mat}_{\beta_1}(\ell)$ et $A_2 = \mathrm{Mat}_{\beta_2}(\ell)$. Alors : $A_2 = P^T . A_1 . P$

Ri 98 **Déf 7 :** On appelle rang de ℓ le rang de la matrice qui représente ℓ dans une base quelconque.

om 63 **Déf 8 :** On appelle discriminant dans une base β de ℓ le déterminant de la matrice qui représente ℓ dans cette base. On le note $\Delta_\beta(\ell)$.

Déf 9 : On appelle forme quadratique sur E une application q de E dans K définie par $q(x) = \ell(x,x)$ $\forall x \in E$, où ℓ est une forme bilinéaire sur E.

Contre-ex 10 : Il n'y a pas forcément unicité : les deux formes bilinéaires de l'exemple 2 définissent la même forme quadratique.

Théorème 11 : Si q est une forme quadratique sur E, il existe une unique forme bilinéaire symétrique ℓ tel que $q(x) = \ell(x,x)$ $\forall x \in E$.

On a : $\ell(x,y) = \dfrac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2} = \dfrac{q(x+y) - q(x-y)}{4}$ $\forall x,y \in E$

Déf 12 : Avec les notations du théorème 11, on dit que ℓ est la forme polaire de q.

Déf 13 : On appelle matrice, rang, discriminant d'une forme quadratique q, la matrice, le rang, le discriminant de sa forme polaire associée.

Exemple 14 : Dans $\mathbb{R}^3$, $q(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$ est une forme quadratique dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ GOU 241

II Orthogonalité et isotropie [ROM] [GRi]

Désormais soit q une forme quadratique sur E de forme polaire ℓ. ROM 465

Déf 15 : Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dit orthogonaux relativement à ℓ si $\ell(x,y) = 0$.

Si $X \subset E$, l'orthogonal de X relativement à ℓ est $X^\perp = \{ y \in E \, ; \, \ell(x,y) = 0 \ \forall x \in X \}$

Prop 16 :
- $\{0\}^\perp = E$
- $X^\perp$ est un SEV de E
- $X \subset (X^\perp)^\perp$
- $X \subset Y$ implique $Y^\perp \subset X^\perp$

Déf 17 : On dit que $x \in E$ est isotrope pour q si

$q(x) = 0$. On a le cône isotrope de q :
$C_q = q^{-1}(\{0\}) = \{x \in E \, ; \, q(x) = 0\}$

Déf 18 : Le noyau de φ (resp q) est l'orthogonal de E :
$\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(q) = \{y \in E \, ; \, \varphi(x,y) = 0 \ \forall \ x \in E\}$

Prop 19 : On a : $\mathrm{Ker}(q) \subset C_q$

Prop 20 : Le noyau de q correspond au noyau de sa matrice associée dans une base quelconque.

Déf 21 : On dit que φ (ou q) est non dégénérée si son noyau est réduit à $\{0\}$.

Déf 22 : On dit que q est définie $q(x) \neq 0 \ \forall x \in E \setminus \{0\}$, càd si $C_q = \{0\}$.

Prop 23 : Si q est définie, q est non-dégénérée.

GRi 305 **Contre-ex 24 :** Sur $\mathbb{R}^3$, $q(x) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_1 x_2 - 3x_1 x_3 + 8x_2 x_3$ est non dégénérée mais pas définie car e_3 est isotrope.

ROM 468 **Théorème 25 :** Pour tout SEV F de E, on a $\dim(F) + \dim(F^\perp) \geq \dim(E)$, l'égalité étant réalisée pour q non dégénérée.
L'égalité $E = F \oplus F^\perp$ est réalisé ssi la restriction de q à F est non dégénérée.

III Réduction et classification des formes quadratiques

1) Réduction de Gauss [ROM][GRi]

ROM 469 **Théorème 26 (de réduction de Gauss) ADMIS :** Pour toute forme quadratique non nulle q sur E, il existe $n \in [\![1 ; n]\!]$, des scalaires non nuls $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ et des formes linéaires $(l_i)_{1 \leq i \leq n}$ linéairement indépendantes dans E^* tel que
$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, l_i^2(x) \quad \forall x \in E$.

GRi 308 **Méthode 27 :** On dispose d'une méthode pour réduire en carrés une forme quadratique. Deux cas se présentent : quand un terme carré est non nul, et quand il n'y a que des termes rectangles.

Exemple 28 : 1) Sur $\mathbb{R}^3$, si $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2$ GRi
$+ 2x_1 x_2 - 4x_2 x_3$, alors : $q(x) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + x_3^2$ 226
2) Sur $\mathbb{R}^3$, si $q(x) = 5x_1 x_2 + 6x_1 x_3 + 3x_2 x_3$, alors GRi 308
$$q(x) = \frac{1}{20}(5x_1 + 5x_2 + 9x_3)^2 - \frac{1}{20}(5x_1 + 5x_2 - 3x_3)^2 - \frac{18}{5} x_3^2$$

Théorème 29 : Avec les mêmes notations, il existe une base ROM
$(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E dans laquelle la matrice de q est diagonale 473
de la forme $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (si $r = rg(q)$, les r premiers λ_i sont non nuls et les suivants sont nuls).

Déf 30 : Une telle base $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est dite orthogonale pour q.

Prop 31 : Avec les mêmes notations, on a $rg(q) = r$ et $\mathrm{Ker}(q) = \{x \in E \, ; \, l_1(x) = l_2(x) = \dots = l_r(x) = 0\}$.

2) Classification sur $\mathbb{C}$ [GRi]

On suppose ici que $K = \mathbb{C}$.

Théorème 32 : Il existe une base $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ tel que si GRi
$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, alors $q(x) = \sum_{i=1}^{r} x_i^2$ où $r = rg(q)$ 310

Ainsi : $\mathrm{Mat}_\beta(q) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Corollaire 33 : Il existe une base orthonormée pour q ssi $rg(q) = n$ (càd ssi q est non dégénérée).

3) Classification sur $\mathbb{R}$ [ROM][GRi]

On suppose ici que $K = \mathbb{R}$.

Déf 34 : 1) On dit que q est positive si $q(x) \geq 0 \ \forall x \in E$. ROM
2) On dit que q est définie positive si $q(x) > 0 \ \forall x \in E \setminus \{0\}$. 475

Remarque 35 : On définit de manière analogue les formes quadratiques négatives et définies négatives.

Lemme 36 (Cauchy-Schwarz): Si q est positive, on a :
$|\ell(x,y)| \leq \sqrt{q(x)} \cdot \sqrt{q(y)} \quad \forall x, y \in E$.

Corollaire 37: Si q est positive, alors $\mathrm{Ker}(q) = C_q$.

GRi 311 **Théorème 38 (de Sylvester)**: Il existe une base $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ de E tel que si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a :
$q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$, c'est à dire

$$\mathrm{Mat}_\beta(q) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } r = rg(q)$$

et p ne dépend que de q (et non de β)

Déf 39: Le couple $(p, r-p)$, noté $sgn(q)$, est appelé signature de q.

Corollaire 40: 1) q est définie positive $\iff sgn(q) = (n, 0)$
2) q est définie négative $\iff sgn(q) = (0, n)$
3) q est non-dégénérée $\iff sgn(q) = (p, n-p)$

Exemple 41: Sur $\mathbb{R}^3$, si $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 15x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$ alors $sgn(q) = (2, 1)$.

IV Applications

1) Un exemple sur $M_n(\mathbb{R})$: la trace [ROM]

ROM 491 **Prop 42**: L'application $q : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $q(M) = \mathrm{Tr}(M^2)$ est une forme quadratique non dégénérée de signature $\left(\frac{n(n+1)}{2} ; \frac{n(n-1)}{2}\right)$

Application 43: $S_n(\mathbb{R})^\perp = A_n(\mathbb{R})$. On a de plus que $q|_{S_n(\mathbb{R})}$ est définie positive et $q|_{A_n(\mathbb{R})}$ est définie négative.

2) Groupe orthogonal associé à q [GRi]

Soit q une forme quadratique non dégénérée sur E.

Prop 44: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ GRi 317
tel que $s(u(x), y) = s(x, u^*(y)) \quad \forall x, y \in E$
où s est la forme polaire de q

Prop 45: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre : GRi 318
1) $q(u(x)) = q(x) \quad \forall x \in E$
2) $s(u(x), u(y)) = s(x, y) \quad \forall x, y \in E$
3) $u^* \circ u = id$. En particulier u est bijectif.

Déf 46: Un tel endomorphisme est dit orthogonal relativement à q. On note :
$$O(q) = \{u \in \mathcal{L}(E) ;\ u^* \circ u = id\}$$

Prop 47: $O(q)$ est un groupe pour la composition, appelé groupe orthogonal de q.

Prop 48: Soit $u \in O(q)$, alors $\det(u) = \pm 1$. L'ensemble $SO(q) = \{u \in O(q) ; \det(u) = 1\}$ est un sous-groupe de $O(q)$, appelé groupe spécial orthogonal de q.

Prop 49: Soit β une base de E, $S = \mathrm{Mat}_\beta(q)$ et $A = \mathrm{Mat}_\beta(u)$.
On a : $u \in O(q) \iff A^T . S . A = S$