27 Leçon 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

I. Dual d'un espace vectoriel

1. Formes linéaires et espace dual [ROM]

   Forme linéaire, espace dual, exemple, surjectivité, hyperplan, équivalences pour être un hyperplan

2. Base duale [GOU1] [GRI] [ROM]

   Forme linéaire coordonnée, base duale, $E \simeq E^*$, exemple avec $K_n[X]$, théorème de représentation de Riesz dans un espace euclidien, DEV 1 : dual de $M_n(K)$

3. Bidual [GOU1]

   Bidual, isomorphise canonique entre E et E^{**}, base antéduale

II. Orthogonalité

1. Orthogonal d'une partie [GOU1]

   Vecteur orthogonal, $A^{\perp}$, B°, prop, dimensions des orthogonaux, équation d'un SEV avec les hyperplans, lien entre intersection et somme

2. Application transposée [ROM] [GOU1]

   Transposée, application transposée $u \mapsto {}^t u$, prop sur la transposée, matrice de la transposée, matrice de passage pour des bases duales + exemple

III. Applications

1. Calcul différentiel [GOU2]

   Différentielle, dèf du gradient, expression de la différentielle et du gradient dans les bases

2. Formes quadratiques réelles [GOU] [GRI]

   Base q-orthogonale, DEV 2 : loi d'inertie de Sylvester, exemple

Présentation :

- Voir présentation page 1 de Carnet de voyage en Algébrie
- L'intérêt des formes linéaires est que pour étudier un EV E, on va étudier son dual.
- L'isomorphisme entre E et E^* n'est pas canonique car nécessite de fixer une base. En revanche, E et E^{**} sont canoniquements isomorphes (en dimension infinie on a que l'injectivité).
- Les formes linéaires sont utiles en géométrie car permettent de définir les hyperplans. Nous verrons que les SEV peuvent être caractérisés comme des intersections d'hyperplans.
- Si E est un espace euclidien, on retrouve la notion classique d'orthogonalité avec le théorème de représentation de Riesz.
- La notion d'application transposée va nous permettre de lier les images et les noyaux des applications, mais également donner des résultats remarquables sur les sous-espaces stables.

Développements :

- Dual de $M_n(K)$

  - Carnet de voyage en Algébrie, Caldero-Peronnier, p5

- Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi, p458

- Loi d'inertie de Sylvester
  - Algèbre, Gourdon, p243
  - Algèbre linéaire, Grifone, p307

Références :

- [ROM] Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi
- [GOU1] Algèbre-Probabilités, Gourdon
- [GRI] Algèbre linéaire, Grifone
- [GOU2] Analyse, Gourdon

Leçon 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n, avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Dual d'un espace vectoriel

1) Formes linéaires et espace dual [ROM]

ROM 141 **Déf 1 :** On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans K. L'ensemble $\mathcal{L}(E, K)$ des formes linéaires sur E est noté E^*. C'est un K-ev appelé espace dual de E.

Exemple 2 : Soit $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors les projections $p_j : x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto x_j$ sont des formes linéaires.

Exemple 3 : Pour tout $B \in M_n(K)$, $A \mapsto Tr(BA)$ est une forme linéaire

ROM 141 **Prop 4 :** Une forme linéaire non nulle est surjective.

ROM 445 **Déf 5 :** On appelle hyperplan de E, le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

Prop 6 : Un hyperplan de E est un sous-espace de E supplémentaire d'une droite.

Prop 7 : Un hyperplan est un sous-espace de E de dimension $n-1$.

Prop 8 : Soit $f, g \in E^*$ tel que $Ker(f) = Ker(g)$. Alors f et g sont proportionnelles.

2) Base duale [GOU][GRI][ROM]

GOU 133 **Déf 9 :** Soit $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout $1 \leq i \leq n$, la forme linéaire e_i^* définie sur β par $e_i^*(e_j) = 0$ si $j \neq i$ et $e_i^*(e_i) = 1$, s'appelle forme linéaire coordonnée d'indice i.

Théorème 10 : Soit $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ base de E. Alors $\beta^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* appelée base duale de β.

Corollaire 11 : $\dim(E^*) = \dim E$ et $E \simeq E^*$

Pour tout $\ell \in E^*$, on a $\ell = \sum_{i=1}^{n} \ell(e_i) e_i^*$

Remarque 12 : Cet isomorphisme n'est pas canonique car dépend du choix de β. GRI 85

Exemple 13 : Soit $\beta = (X^i)_{0 \leq i \leq n}$ la base canonique de $K_n[X]$. ROM 442

Tout polynôme s'écrit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $a_i = \frac{P^{(i)}(0)}{i!}$, la base duale de β est définie par $e_i^*(P) = a_i = \frac{P^{(i)}(0)}{i!}$ $\forall i \in [\![0, n]\!]$.

Théorème 14 : Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Alors l'application $\phi : \begin{array}{l} E \to E^* \\ y \mapsto (x \mapsto \langle x, y \rangle) \end{array}$ est bijective et est une isométrie. GRI 241

Ainsi pour tout $\ell \in E$, $\exists ! y \in E^*$ tel que $\ell(x) = \langle x, y \rangle$ $\forall x \in E$

Corollaire 15 : Si E est euclidien ou hermitien, alors $y \mapsto \langle \cdot, y \rangle$ est un isomorphisme canonique entre E et E^*.

Théorème 16 : L'application $A \mapsto Tr(A \cdot)$ définit un isomorphisme entre $M_n(K)$ et $M_n(K)^*$ ROM 459

Application 17 : Si $\ell \in M_n(K)^*$ vérifie $\ell(AB) = \ell(BA)$ $\forall A, B \in M_n(K)$, alors $\ell = \lambda Tr$ pour $\lambda \in K$. DEV 1

3) Bidual [GOU]

Déf 18 : On appelle bidual de E l'espace dual de E^*, noté E^{**}. GOU 132

Théorème 19 : Si $x \in E$, on note $\tilde{x} : \begin{array}{l} E^* \to K \\ \ell \mapsto \ell(x) \end{array}$. On a $\tilde{x} \in E^{**}$ et l'application $f : \begin{array}{l} E \to E^{**} \\ x \mapsto \tilde{x} \end{array}$ est un isomorphisme

Remarque 20 : Cet isomorphisme est canonique (il ne dépend pas du choix d'une base). On peut donc identifier E et E^{**}.

Prop 21 : Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de E^*. Alors il existe une unique base $(e_1, \dots, e_n)$ de E tel que pour tout i, $e_i^* = f_i$. Cette base s'appelle la base antéduale de $(f_1, \dots, f_n)$

II Orthogonalité

1) Orthogonal d'une partie [GOU]

GOU 134 **Déf 22 :** On dit que $\ell \in E^*$ et $x \in E$ sont orthogonaux si $\ell(x) = 0$.

Déf 23 : • Si $A \subset E$, on note $A^\perp = \{ \ell \in E^* ; \forall x \in A, \ell(x) = 0 \}$. L'ensemble $A^\perp$ est un SEV de E^* appelé orthogonal de A.

• Si $B \subset E^*$, on note $B^\circ = \{ x \in E ; \forall \ell \in B, \ell(x) = 0 \}$. L'ensemble B° est un SEV de E appelé orthogonal de B.

Remarque 24 : Si $\ell \in E^*$, alors $\{\ell\}^\circ = \mathrm{Ker}(\ell)$

Prop 25 : • Si $A_1 \subset A_2 \subset E$, alors $A_2^\perp \subset A_1^\perp$

• Si $B_1 \subset B_2 \subset E^*$, alors $B_2^\circ \subset B_1^\circ$

• Si $A \subset E$, alors $A^\perp = \mathrm{vect}(A)^\perp$

• Si $B \subset E^*$, alors $B^\circ = \mathrm{vect}(B)^\circ$

• $\{0\}^\perp = E^*$; $E^\perp = \{0\}$; $\{0\}^\circ = E$; $(E^*)^\circ = \{0\}$

Théorème 26 : Soit F SEV de E et G SEV de E^*.

• On a $\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp)$ et $F^{\perp\circ} = F$

• On a $\dim(E) = \dim(G) + \dim(G^\circ)$ et $G^{\circ\perp} = G$

Corollaire 27 : Si $F \subset E$, alors : $F = E \iff F^\perp = \{0\}$

Corollaire 28 (équation d'un SEV) :

• Soit p formes linéaires $\ell_1, \dots, \ell_p$ de E^* tel que $rg(\ell_1, \dots, \ell_p) = r$. Le SEV $F = \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(\ell_i)$ est alors de dimension $n - r$

• Réciproquement, si F est un SEV de E de dimension q, il existe $n-q$ formes linéaires linéairement indépendantes $\ell_1, \dots, \ell_{n-q}$ tel que $F = \bigcap_{i=1}^{n-q} \mathrm{Ker}(\ell_i)$

Prop 29 : Soit A_1 et A_2 deux SEV de E. Alors :

$(A_1 + A_2)^\perp = A_1^\perp \cap A_2^\perp$ $\qquad$ $(A_1 \cap A_2)^\perp = A_1^\perp + A_2^\perp$

Soit B_1 et B_2 deux SEV de E^*. Alors :

$(B_1 + B_2)^\circ = B_1^\circ \cap B_2^\circ$ $\qquad$ $(B_1 \cap B_2)^\circ = B_1^\circ + B_2^\circ$

2) Application transposée [ROM] [GOU]

Soit F et G deux K-espaces vectoriels.

Déf 30 : La transposée de l'application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est l'application $^t u$ de F^* dans E^* définie par : ROM 452

$\forall \ell \in F^*, \ {}^t u(\ell) = \ell \circ u$

On a que $^t u \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$.

Prop 31 : L'application $u \mapsto {}^t u$ est linéaire et injective de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{L}(F^*, E^*)$.

Théorème 32 : Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors :

1) $^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$ $\qquad$ 2) Pour $F = E$, $^t Id_E = Id_{E^*}$

3) Si u est un isomorphisme de E sur F, alors $^t u$ est un isomorphisme de F^* sur E^* et $({}^t u)^{-1} = {}^t(u^{-1})$

4) $\mathrm{Ker}({}^t u) = \mathrm{Im}(u)^\perp$

5) u est surjective ssi $^t u$ est injective

6) $\mathrm{Im}({}^t u) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$

7) u est injective ssi $^t u$ est surjective.

8) $rg(u) = rg({}^t u)$.

~~**Prop 33 :** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un SEV F de E est stable par u ssi $F^\perp$ est stable par $^t u$.~~ GOU 136

Théorème 34 : Soit β_1 base de E et β_2 base de F, de bases duales β_1^* et β_2^*. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :

$Mat_{\beta_2^*, \beta_1^*}({}^t u) = Mat_{\beta_1, \beta_2}(u)^T$

Théorème 35 : Soit β, β' deux bases de E et β^*, β'^* leurs bases duales respectives. Soit P la matrice de passage de β à β'. Alors la matrice de passage de β^* à β'^* est $(P^{-1})^T$.

Exemple 36 : Soit $\dim(E) = 3$ et $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ base de E. Soit $f_1^*, f_2^*, f_3^* \in E^*$ tel que $f_1^* = 2e_1^* + e_2^* + e_3^*$, $f_2^* = -e_1^* + 2e_3^*$, $f_3^* = e_1^* + 3e_2^*$ GOU 137

Alors $\gamma^*=(f_1^*, f_2^*, f_3^*)$ est une base de E^*. Pour trouver la base antéduale, on sait que la matrice M de passage de β^* à γ^* est $(P^{-1})^T$ où P est la matrice de passage de β à $\mathcal{C}$. On a donc : $P = (M^T)^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

Alors les coordonnées de f_1, f_2, f_3 sont les vecteurs colonnes.

III Applications

1) Calcul différentiel [GOU]

GOU 323 **Déf 37 :** Soit E et F deux $\mathbb{R}$-EVN de dimension finie, U un ouvert de E et $a \in U$. On dit que $f : U \to F$ est différentiable en a s'il existe $\ell \in \mathcal{L}_c(E,F)$ telle que

$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o(\|h\|_E)$ lorsque $h \to 0$

Si ℓ existe, elle est unique et s'appelle la différentielle de f en a. On la note $df(a)$.

Prop 38 : Si E est euclidien et $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in U$, alors $df(a) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$ est une forme linéaire.

Il existe donc un unique vecteur $v \in E$ tel que

$df(a)(h) = \langle v, h \rangle$ pour tout $h \in E$.

Déf 39 : Ce vecteur v s'appelle le gradient de f en a et est noté $\nabla f(a)$.

Prop 40 : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$. Soit $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors :

$df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) . e_i^*$ et $\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) . e_i$

~~**Théorème 41 (des extrema liés) :** Soit $f, g_1, \dots, g_n : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On pose $\Gamma = \{x \in U ; g_1(x) = \dots = g_n(x) = 0\}$. Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $dg_1(a), \dots, dg_n(a)$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des réels (uniques) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ appelés multiplicateurs de Lagrange tels que :~~

~~$df(a) = \lambda_1 dg_1(a) + \dots + \lambda_n dg_n(a)$~~

2) Formes quadratiques réelles [GOU][GRI]

Soit q une forme quadratique sur E, et $K = \mathbb{R}$

Déf 41 : Une base $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ de E est dite q-orthogonale si $\varphi(e_i, e_j) = 0 \quad \forall i \neq j$ où φ est la forme polaire de q. GOU 243

Théorème 42 : Il existe une base q-orthogonale de E.

Théorème 43 (loi d'inertie de Sylvester) : Il existe des entiers $p \geq 1$ et $n \geq 1$ et des formes linéaires indépendantes (f_i) avec $i \in [\![1 ; p+n]\!]$ tel que, $\forall x \in E$, GOU 246 GRI 313

$$q(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x)^2 - \sum_{i=p+1}^{p+n} f_i(x)^2$$

Les entiers p et n ne dépendent que de q. Le couple (p, n), noté $\mathrm{sgn}(q)$, est appelé signature de q. On a $\mathrm{rg}(q) = p + n$.

DEV 2

Exemple 44 : Sur $\mathbb{R}^3$, soit $q(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + xz + yz$ GOU 247

Alors $\mathrm{sgn}(q) = (1, 2)$ et $\mathrm{rang}(q) = 3$.