# 26 Leçon 158 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

I. Espaces euclidiens

1. Généralités [ROM]

Produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz, vecteurs orthogonaux, famille orthonormale, théorème de Pythagore, orthonormalisation de Gram-Schmidt, projeté orthogonal

2. Adjoint d'un endomorphisme [ROM]

Théorème de représentation de Riesz, adjoint, prop de l'adjoint

II. Endomorphismes orthogonaux

1. Définitions et propriétés [ROM]

Isométrie, groupe orthogonal, équivalences pour être une isométrie, matrice orthogonale, groupe spécial orthogonal

2. Réduction [MAN] [ROM]

Valeurs propres d'une isométrie, stabilité de $F$, théorème de réduction

III. Endomorphismes symétriques

1. Définitions et propriétés [ROM]

Endomorphisme symétrique, matrice symétrique

2. Réduction [MAN] [ROM]

Stabilité de $F$, les valeurs propres sont réelles, les SEP sont orthogonaux

DEV 1 : théorème spectral

Version matricielle, contre-exemple dans $\mathbb{C}$, co-diagonalisation

3. Endomorphismes symétriques (définis) positifs [ROM]

Matrice symétrique positive, équivalence avec les valeurs propres, racine carrée

DEV 2 : décomposition polaire, corollaire sur le rayon spectral

Présentation :

- Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est très utile car donne une construction explicite de la BON, et car la matrice de nombreux endomorphismes est plus agréable à manipuler dans une BON.
- Le théorème de représentation de Riesz peut s'obtenir dans un cadre plus général, où $E$ est un espace de Hilbert et $l$ est une forme linéaire continue sur $E$.
- En fonction de la caractérisation de l'endomorphisme adjoint, on peut définir plusieurs classes d'endomorphismes remarquables.
- Le théorème spectral est central car permet en un coup d'oeil de dire qu'une matrice est diagonalisable. De plus, il est utilisé dans de nombreux résultats.
- Le théorème spectral n'est pas vrai pour des matrices symétriques complexes. En revanche, on dispose d'un énoncé analogue dans les espaces hermitiens : si $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ est une matrice hermitienne ($\bar{A}^T = A$) alors il existe $U \in U_n(\mathbb{C})$ une matrice unitaire ($\bar{U}^T U = I_n$) tel que $D = \bar{U}^T A U$ soit diagonale réelle.
- On voit dans la décomposition polaire l'utilité de connaitre les endomorphismes orthogonaux et symétriques, car on se ramène à ces cas là.

- Le terme « décomposition polaire » vient sûrement de l'analogie avec l'écriture d'un nombre complexe non nul sous la forme $z=re^{i\theta}$ avec $r>0$. En effet, si $n=1$, $\mathcal{H}_1(\mathbb{C})=\mathbb{R}_+^*$ et $U_1(\mathbb{C})=\{z\in\mathbb{C};|z|=1\}=e^{i\theta}$.

Développements :

- Théorème spectral
  - Algèbre linéaire-réduction des endomorphismes, Mansuy-Mneimné, p124
  - Algèbre linéaire, Grifone, p256
- Décomposition polaire
  - Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi, p735
  - Algèbre linéaire-réduction des endomorphismes, Mansuy-Mneimné, p126
  - L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements , Isenmann-Pecatte, p128

Références :


- [ROM] Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi
- [MAN] Algèbre linéaire réduction des endomorphismes, Mansuy-Mneimné

# Leçon 158 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ muni d'un produit scalaire.

## I Espaces euclidiens

### 1) Généralités [ROM]

ROM 713 **Déf 1 :** Un produit scalaire sur $E$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

**Déf 2 :** Un espace euclidien est un ev réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

**Théorème 3 (inégalité de Cauchy-Schwarz) :** $\forall x, y \in E$, $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$ avec $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Il y a égalité ssi $x$ et $y$ sont liés.

ROM 715 **Déf 4 :** On dit que deux vecteurs $x$ et $y$ dans $E$ sont orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$.
On appelle famille orthogonale dans $E$ toute famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de $E$ tel que $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ $\forall i \neq j$ dans $I$. Si de plus $\|e_i\| = 1$ $\forall i \in I$, on dit que la famille est orthonormée.

**Théorème 5 (de Pythagore) :** Les vecteurs $x$ et $y$ sont orthogonaux dans $E$ ssi $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

**Théorème 6 (Orthonormalisation de Gram-Schmidt) :** A toute base de $E$ on peut associer une base orthonormée de $E$.

**Théorème 7 :** Soit $F$ SEV de $E$. Pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique vecteur $y \in F$ tel que $\|x-y\| = d(x, F) = \inf_{z\in F} \|x - z\|$. Ce vecteur est également l'unique vecteur de $F$ tel que $x - y \in F^\perp$. Si $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ est une BON de $F$, alors $y = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle e_i$.

**Corollaire 8 :** Pour tout SEV $F$ de $E$, on a :

$$E = F \oplus F^\perp$$

### 2) Adjoint d'un endomorphisme [ROM]

**Théorème 9 (de représentation de Riesz) :** $\forall l \in E^*$, $\exists! a \in E$ tel que $l(x) = \langle x, a\rangle$ $\forall x \in E$. ROM 718

**Théorème 10 :** $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\exists! u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$ $\forall x, y \in E$

**Déf 11 :** On dit alors que $u^*$ est l'adjoint de $u$.

**Prop 12 :** Soit $\beta$ une BON de $E$. Si $A = \mathrm{Mat}_\beta(u)$ et $A^* = \mathrm{Mat}_\beta(u^*)$, alors : $A^* = A^T$.
Ainsi $\det(u) = \det(u^*)$.

**Prop 13 :** Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :
1) $(\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^*$
2) $(u^*)^* = u$
3) $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$
4) Si $u \in GL(E)$, alors $u^*$ aussi et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$

**Prop 14 :** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :
1) $\mathrm{Ker}(u^*) = \mathrm{Im}(u)^\perp$ et $\mathrm{Im}(u^*) = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$
2) $\mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}(u)$
3) Soit $F$ SEV de $E$. Alors $F$ est stable par $u$ ssi $F^\perp$ est stable par $u^*$.

## II Endomorphismes orthogonaux

### 1) Définitions et propriétés [ROM]

**Déf 15 :** Une isométrie (ou application orthogonale) de $E$ est une application $u : E \to E$ qui conserve le produit scalaire, càd tel que $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ $\forall x, y \in E$. ROM 720

**Déf 16 :** On note $O(E)$ l'ensemble des isométries de $E$, appelé groupe orthogonal.

**Exemple 17 :** Les seules homothéties qui sont des isométries sont $id$ et $-id$.
Pour $\dim(E) = 1$, on a $O(E) = \{-id, id\}$

**Prop 18** : Une application $u : E \to E$ est une isométrie ssi elle est linéaire et conserve la norme.

**Contre-ex 19** : Si $e \in E$ est de norme 1, alors $u : x \mapsto \|x\| . e$ conserve la norme mais n'est pas linéaire.

**Théorème 20** : Une isométrie est un automorphisme de $E$ et $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

**Prop 21** : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\beta$ une BON de $E$. Soit $A$ la matrice de $u$ dans $\beta$. Alors on a équivalence entre :

1) $u$ est une isométrie
2) $u$ transforme $\beta$ en une BON de $E$
3) $A . A^T = A^T . A = I_n$

**Déf 22** : On appelle matrice orthogonale toute matrice réelle $A$ tel que $A^T . A = A . A^T = I_n$.
On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

**Corollaire 23** : pour tout $u \in O(E)$, $\det(u) = \pm 1$

GRI 243 **Déf 24** : On note $SO_n(\mathbb{R}) = \{ A \in O_n(\mathbb{R}) ; \det(A) = 1 \}$ qui est appelé groupe spécial orthogonal

ROM 724 **Prop 25** : $SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe distingué de $O_n(\mathbb{R})$ d'indice 2.

ROM 722 **Théorème 26** : $O(E)$ est une partie compacte de $\mathcal{L}(E)$.

### 2) Réduction [MAN] [ROM]

MAN 122 **Prop 27** : Les valeurs propres d'un endomorphisme orthogonal sont de module 1. En particulier, les valeurs propres réelles appartiennent à $\{\pm 1\}$.

**Lemme 28** : Soit $u \in O(E)$ avec $\dim(E) = 2$. Alors la matrice de $u$ dans une BON est de la forme :
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}.$$
Si $u$ n'admet pas de valeur propre réelle, alors la matrice de $u$ est de la première forme.

**Lemme 29** : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où $\dim(E) \geq 2$, avec $u$ sans valeurs propres réelles. Alors il existe un plan stable par $u$.

**Prop 30** : Soit $u \in O(E)$ et $F$ SEV de $E$. Si $F$ est stable par $u$, alors $F^\perp$ est stable par $u$.

**Théorème 31** : Soit $u \in O(E)$. Alors il existe une BON $\beta$ de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est diagonale par blocs avec des blocs parmi : $I_p, -I_q, R_1, \dots, R_r$ ROM 727
où $R_k = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{pmatrix}$ avec $\theta_k \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$,
et $p + q + 2r = n$

**Corollaire 32** : Avec les notations précédentes, on a que $u \in SO(E)$ ssi $q$ est pair.

## III Endomorphismes symétriques

### 1) Définitions et propriétés [ROM]

**Notation 33** : On note $S_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) ; A^T = A \}$ ROM 732

**Déf 34** : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit symétrique (ou auto-adjoint) si $u^* = u$, càd si :
$\forall x, y \in E$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$.
On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques.

**Théorème 35** : $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique ssi sa matrice dans une BON de $E$ est symétrique.

**Corollaire 36** : $S(E)$ est un SEV de $\mathcal{L}(E)$ et $\dim(S(E)) = \frac{n(n+1)}{2}$.

**Prop 37** : Si $u \in S(E)$, alors $u + u^*$, $u^* \circ u$ et $u \circ u^*$ sont dans $S(E)$

### 2) Réduction [MAN] [ROM]

**Lemme 38** : Soit $u \in S(E)$ et $F$ SEV de $E$. Si $F$ est stable par $u$, alors $F^\perp$ est stable par $u$ MAN 125

**Prop 39 :** Soit $u \in S(E)$. Alors toutes les valeurs propres de $u$ sont réelles.

**Prop 40 :** Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux.

**Théorème 41 (spectral) :** Soit $u \in S(E)$. Alors $u$ est diagonalisable dans une base orthonormée.

DEV 1

**Théorème 42 (spectral) :** Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tel que $S = O . \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) O^T$

**Contre-ex 43 :** Le résultat n'est pas vrai pour des matrices symétriques complexes. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ n'admet que 0 comme valeur propre donc n'est pas diagonalisable.

Rom 739 **Théorème 44 :** Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de $S(E)$. Alors il existe une BON commune de diagonalisation dans $E$ de la famille $(u_i)_{i \in I}$ ssi ces endomorphismes commutent 2 à 2.

## 3) Endomorphismes symétriques (définis) positifs [Rom]

Rom 735 **Déf 45 :** Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique positive (resp définie positive) si elle est symétrique avec $\langle x, Ax \rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ (resp $\langle x, Ax \rangle > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$).

On note $S_n^+(\mathbb{R})$ (resp $S_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp définies positives).

**Théorème 46 :** Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ (resp $S_n^{++}(\mathbb{R})$) ssi toutes ses valeurs propres sont positives (resp strictement positives).

Rom 739 **Théorème 47 :** Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique matrice $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.
De plus, si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

**Théorème 48 (décomposition polaire) :** Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique décomposition $A = OS$ où $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

DEV 2

**Corollaire 49 :** Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = OS$ où $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.

**Remarque 50 :** Il n'y a pas unicité dans le corollaire précédent.

**Application 51 :** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors Rom 742 CAL 351

$$|||A||| = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

où $\rho$ est le rayon spectral donné par

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} \{|\lambda|\}$$

et $|||.|||$ la norme subordonnée associée à la norme canonique sur $\mathbb{R}^n$.