

25 Leçon 157 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

I. Matrices symétriques réelles et hermitiennes

1. Définition et premières propriétés [GOU]

Matrice symétrique-antisymétrique, dimensions, matrice hermitienne, exemples

2. Lien avec les formes quadratiques et hermitiennes [GOU]

Forme bilinéaire, forme sesquilinéaire, matrice de φ , matrices congruentes, lien avec les matrices symétrique, forme quadratique, forme hermitienne, forme polaire, exemple

II. Réduction et applications

1. Théorème spectral [MAN] [GOU] [ROM]

Endomorphisme symétrique, DEV 1 : [théorème spectral](#), cas des matrices hermitiennes, co-diagonalisabilité dans une BON

2. Matrices symétriques (définies) positives [ROM]

Matrice symétrique positive, matrice hermitienne positive, lien avec les valeurs propres, DEV 2 : [décomposition polaire](#), cas de $M_n(\mathbb{R})$, application au rayon spectral

3. Réduction d'une forme quadratique [GOU] [ROM] [GRI]

Base q -orthogonale, forme de la matrice, théorème de réduction de Gauss, méthode, théorème de Sylvester, signature, exemple

Présentation :

- Le théorème spectral est central car permet en un coup d'oeil de dire qu'une matrice est diagonalisable. De plus, il est utilisé dans de nombreux résultats.
- Le théorème spectral n'est pas vrai pour des matrices symétriques complexes. En revanche, on dispose d'un énoncé analogue dans les espaces hermitiens : si $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ est une matrice hermitienne ($\bar{A}^T = A$) alors il existe $U \in U_n(\mathbb{C})$ une matrice unitaire ($\bar{U}^T U = I_n$) tel que $D = \bar{U}^T A U$ soit diagonale [réelle](#).
- Le terme « décomposition polaire » vient sûrement de l'analogie avec l'écriture d'un nombre complexe non nul sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$. En effet, si $n = 1$, $\mathcal{H}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{R}_+^*$ et $U_1(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} = e^{i\theta}$.
- Pour $K = \mathbb{R}$, deux matrices symétriques sont congruentes ($P^T A P = B$) ssi elles ont même signature.
Pour $K = \mathbb{C}$, deux matrices symétriques sont congruentes ssi elles ont même rang.
- Une forme quadratique définie positive définit un produit scalaire : si l'on dispose d'une telle forme quadratique, alors E est un espace euclidien.

Développements :

- Théorème spectral
 - Algèbre linéaire-réduction des endomorphismes, Mansuy-Mneimné, p124
 - Algèbre linéaire, Grifone, p256
- Décomposition polaire
 - Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi, p735

- Algèbre linéaire-réduction des endomorphismes, Mansuy-Mneimné, p126
- L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements , Isenmann-Pecatte, p128

Références :

- [GOU] Algèbre-Probabilités, Gourdon
- [MAN] Algèbre linéaire réduction des endomorphismes, Mansuy-Mneimné
- [ROM] Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi
- [GRI] Algèbre linéaire, Grifone

Leçon 15.7 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes

Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un K -espace vectoriel de dimension finie nent.

I Matrices symétriques et hermitiennes

1) Définition et premières propriétés [60]

Def 1 : On dit que $A \in M_n(K)$ est symétrique (resp. antisymétrique) si $A^T = A$ (resp. $A^T = -A$) et on note $S_n(\mathbb{R})$ (resp. $A_n(\mathbb{R})$) le SEV des matrices symétriques (resp. antisymétriques) réelles.

Prop 2 : 1) $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$
2) $\dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(A_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$

Def 3 : On dit que $A \in M_n(\mathbb{C})$ est une matrice hermitienne si $A^T = A^*$. On note $H_n(\mathbb{C})$ le SEV des matrices hermitiennes.

Prop 4 : $H_n(\mathbb{C}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$

Remarque 5 : $H_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n^2 , mais pas un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

Exemple 6 : $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$ et $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 5 \end{pmatrix} \in H_2(\mathbb{C})$

2) Lien avec les formes quadratiques et hermitiennes [60]

Def 7 : On dit que $\ell : E \times E \rightarrow K$ est bilinéaire si pour tout $x, y, z \in E$, $\lambda \in K$ on a $\ell(x, \lambda y + z) = \lambda \ell(x, y) + \ell(x, z)$ et $\ell(\lambda x + y, z) = \lambda \ell(x, z) + \ell(y, z)$.

Def 8 : On dit que $\ell : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ est une forme sesquilinéaire si pour tout $x, y, z \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$ on a $\ell(x, \lambda y + z) = \overline{\lambda} \ell(x, y) + \ell(x, z)$ et $\ell(\lambda x + y, z) = \lambda \ell(x, z) + \ell(y, z)$.

Remarque 9 : Si E est un $\mathbb{R}$ -ev, toute forme sesquilinéaire est une forme bilinéaire.

Exemple 10 : Si $E = \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{C})$ alors l'application $\ell : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ tel que $\ell(f, g) = \int_0^1 \overline{f(t)} g(t) dt$ définit une forme

sesquilinéaire sur E .

Def 11 : Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\ell : E \times E \rightarrow K$ bilinéaire. Alors la matrice $M = (\ell(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ est appelée matrice de ℓ dans la base B . On a donc : $\ell(x, y) = x^T M y$ où

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Si ℓ est une forme sesquilinéaire, alors : $\ell(x, y) = \overline{x}^T M y$

Def 12 : Si M et M' représentent la même forme bilinéaire (resp. sesquilinéaire) dans deux bases différentes alors il existe $P \in GL_n(K)$ tel que : $M' = P^T M P$ (resp. $M' = \overline{P}^T M P$)

On dit que M et M' sont congruentes et on appelle rang de ℓ le rang de M (importe quelle matrice la représentant).

Def 13 : Soit ℓ une forme bilinéaire sur E . On dit que :

- 1) ℓ est symétrique si $\ell(x, y) = \ell(y, x) \forall x, y \in E$
- 2) ℓ est antisymétrique si $\ell(x, y) = -\ell(y, x) \forall x, y \in E$
- 3) Si $K = \mathbb{C}$, ℓ est hermitienne si $\ell(x, y) = \overline{\ell(y, x)} \forall x, y \in E$

Prop 14 : Une forme bilinéaire est symétrique (resp. antisymétrique)ssi sa matrice dans une base est symétrique (resp. antisymétrique).

Une forme sesquilinéaire est hermitienne ssi sa matrice dans une base est hermitienne.

Def 15 : Une forme quadratique sur E est une application $q : E \rightarrow K$, $x \mapsto \ell(x, x)$ où ℓ est une forme bilinéaire symétrique sur E .

Def 16 : Si $K = \mathbb{C}$, une forme hermitienne est une application $q : E \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ell(x, x)$ où ℓ est une forme sesquilinéaire hermitienne sur E .

Prop 17 : Soit q une forme quadratique (resp. hermitienne). Il existe une unique forme bilinéaire symétrique (resp. sesquilinéaire hermitienne) ℓ tel que $\forall x \in E$, $q(x) = \ell(x, x)$. La forme ℓ est appelée la forme polarisée de q .

Exemple 18: Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $q(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$

La matrice de q dans la base canonique est: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

II Réduction et applications

1) Théorème spectral [MAN][GOU][ROM]

Déf 19: Un endomorphisme n de E est dit symétrique si sa matrice dans une base orthonormée est symétrique.

Lemme 20: Soit n un endomorphisme symétrique et F un SEV de E stable par n . Alors $F^\perp$ est stable par n .

Prop 21: Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ ou $A \in H_n(\mathbb{C})$. Alors, toutes ses valeurs propres sont réelles. DEV 1

Prop 22: Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux.

Théorème 23 (spectral): Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tel que $S = O \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot O^T$

Remarque 24: On a l'orthogonalité: Soit $M \in H_n(\mathbb{C})$, alors il existe $U \in U_n(\mathbb{C})$ tel que $M = U \cdot D \cdot U^T$ où D est une matrice diagonale réelle.

Contre-ex 25: Le résultat n'est pas vrai pour les matrices symétriques complexes. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ n'admet que 0 comme valeur propre donc n'est pas diagonalisable.

Théorème 26: Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de matrices dans $S_n(\mathbb{R})$. Ces matrices sont simultanément diagonalisables dans une base orthonormée (c'est $\exists O \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall i \in I, O^T A_i O$ est diagonale)ssi les matrices commutent deux à deux.

2) Matrices symétriques (définies) positives [ROM]

Déf 27: Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique positive (resp définie positive) si elle est symétrique avec $X^T A X \geq 0$

pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ (resp $X^T A X > 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$). On note $S_n^+(\mathbb{R})$ (resp $S_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp définies positives).

Déf 28: On définit de même:

$H_n^+(\mathbb{C}) = \{A \in H_n(\mathbb{C}) ; X^T A X \geq 0 \quad \forall X \in \mathbb{C}^n\}$

$H_n^{++}(\mathbb{C}) = \{A \in H_n(\mathbb{C}) ; X^T A X > 0 \quad \forall X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\}$

Théorème 29: Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ (resp $S_n^{++}(\mathbb{R})$)ssi toutes ses valeurs propres sont positives (resp strictement positives).

Remarque 30: Ce résultat s'applique aussi à $H_n(\mathbb{C})$.

Théorème 31: Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Alors il existe une même matrice $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = B^2$.

De plus, si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème 32 (décomposition polaire): Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

Alors il existe une unique décomposition $A = O \cdot S$ où $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. DEV 2

Remarque 33: Le résultat se généralise à $GL_n(\mathbb{C})$ avec $U_n(\mathbb{C})$ et $H_n^{++}(\mathbb{C})$.

Corollaire 34: Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = O \cdot S$ où $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Remarque 35: Il n'y a pas unicité dans la corollaire précédent.

Application 36: Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors:

$\|A\|_{III} = \sqrt{\rho(A^T A)}$ où ρ est le rayon spectral défini par: $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$ et $\|A\|_{III}$ est la norme

subordonnée induite par la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

3) Réduction d'une forme quadratique [Gou][Rom][Gou]

Soit q une forme quadratique sur E , de forme polaire ℓ .

Déf 37: Une base p de E est dite q -orthogonale si pour tout couple d'éléments distincts (e, e') de p , on a $\ell(e, e') = 0$.

Corollaire 38: Dans une base q -orthogonale p , la matrice de q est diagonale de la forme $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ($\lambda_i = q(e_i, e_i)$). Les premiers λ_i sont non nuls et les suivants sont nuls.

Théorème 39: Il existe sur E des bases q -orthogonales pour q .

Théorème 40 (de réduction de Gauss): Si q est non nulle, il existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et des scalaires non nuls $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ et des formes linéaires $(\ell_i)_{1 \leq i \leq n}$ indépendantes dans E^* tel que $q(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \ell_i^2(x) \quad \forall x \in E$.

Méthode 41: On dispose d'une méthode pour réduire en carré une forme quadratique. Deux cas se présentent: quand il y a un terme carré, et quand il n'y a que des termes rectangles.

Exemple 42: Sur $\mathbb{R}^3$, si $q(x) = 5x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2x_3$, alors $q(x) = \frac{1}{2} (5x_1 + 5x_2 + 9x_3)^2 - \frac{1}{2} (5x_1 + 5x_2 - 3x_3)^2 - \frac{11}{2} x_3^2$

Théorème 43 (de Sylvester): Soit $K = \mathbb{R}$. Il existe une base $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ de E tel que si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, alors $q(x) = x_1^2 + \dots + 2p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2$ c'est-à-dire

$$\text{Mat}_p(q) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{n-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } n = \text{rg}(q)$$

et p ne dépend que de q (et pas de β).

Déf 44: Le couple $(p, n-p)$, noté $\text{sgn}(q)$, est appelé signature de q .

Corollaire 45: 1) q est définie positive $\Leftrightarrow \text{sgn}(q) = (n, 0)$

2) q est définie négative $\Leftrightarrow \text{sgn}(q) = (0, n)$

3) q est non dégénérée $\Leftrightarrow \text{sgn}(q) = (p, n-p)$

Exemple 46: Sur $\mathbb{R}^3$, si $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 15x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$, alors $\text{sgn}(q) = (2, 1)$.