

## 23 Leçon 155 : Exponentielle de matrices. Applications.

Soit  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $n \geq 1$  et  $A, B \in M_n(K)$ .

### I. Définition et premières propriétés [BERH] [ROM] [MAN]

Norme sur  $M_n(K)$ , exponentielle de matrice, prop, contre-exemple sans commutativité

### II. Méthodes de calcul [MAN] [ROM]

Cas diagonale, cas diagonalisable, cas nilpotent

DEV 1 : décomposition de Dunford + corollaire sur  $e^A$  diagonalisable

### III. Etude de la fonction exponentielle

#### 1. Cas complexe [ROM] [MAN]

Rayon spectral, logarithme matriciel, DEV 2 : surjectivité de l'exponentielle matricielle,  $GL_n(\mathbb{C})$  est CPA, contre-exemple injectivité

#### 2. Cas réel [MAN]

Pas surjective, explicitation de l'image, contre-exemple injectivité

#### 3. Restrictions remarquables [CAL]

Injectivité sur  $D_n(\mathbb{R})$ , décomposition polaire, corollaire sur la norme avec le rayon spectral, homéomorphisme avec  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$

### IV. Application aux équations différentielles [BERT]

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, expression de la solution au problème de Cauchy, exemple, formule de Duhamel

#### Présentation :

- Le but est de généraliser la fonction  $\exp : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}^*$  en une application  $\exp : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ . On observe bien l'analogie avec le développement en série entière de l'exponentielle.
- Une des applications importantes de l'exponentielle de matrices est la résolution de systèmes différentiels linéaires à coefficients constants, où encore une fois l'analogie est frappante avec les systèmes en dimension 1.

#### Développements :

- Décomposition de Dunford + exponentielle de matrice
  - Algèbre-Probabilités, Gourdon, p203
  - Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi, p765
  - Algèbre linéaire réduction des endomorphismes, Mansuy-Mneimné, p141
- Surjectivité de l'exponentielle matricielle
  - Algèbre linéaire réduction des endomorphismes, Mansuy-Mneimné, p224
  - Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi, p769

#### Références :

- [BERH] Algèbre : le grand combat, Berhuy
- [ROM] Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi
- [MAN] Algèbre linéaire réduction des endomorphismes, Mansuy-Mneimné
- [CAL] Nouvelles histoires hédonistes de groupes et géométries, Caldero
- [BERT] Équations différentielles, Florent Berthelin

## Leçon 15.5 : Exponentielle de matrices. Applications

Soit  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $m \geq 1$  et  $A, B \in M_m(K)$ .

### I Définition et premières propriétés [BERH] [ROM] [MAN]

**Def 1 :** On définit une norme sur  $M_m(K)$  par

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \quad \text{pour } A = (a_{ij}) \in M_m(K)$$

**Prop 2 :** On a :  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad \forall A, B \in M_m(K)$

**Lemme 3 :** Soit  $A \in M_m(K)$ . La série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$  est convergente

**Def 4 :** On définit l'exponentielle de  $A$  par :

$$e^A = \exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

**Prop 5 :** La fonction  $\exp$  est continue de  $M_m(K)$  dans  $M_m(K)$ .

**Exemple 6 :** On a  $\exp(0_m) = I_m$  et  $\exp(I_m) = e \cdot I_m$

**Prop 7 :** On a les propositions suivantes :

1)  $\exp(A)$  est un polynôme en  $A$  donc commute avec  $A$

2) Si  $A$  et  $B$  commutent, alors  $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$

3)  $e^A$  est inversible d'inverse  $e^{-A}$

4) Si  $P \in GL_m(K)$ , alors  $e^{PAP^{-1}} = P \cdot e^A \cdot P^{-1}$

5)  $\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}$

6)  $(e^A)^T = e^{A^T}$

7)  $\frac{d}{dt} e^{tA} = e^{tA} \cdot A$

8) La fonction  $t \mapsto e^{tA}$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  de dérivée

$$e^{tA} \cdot A = A \cdot e^{tA}$$

**Contre-ex 8 :** pour avoir  $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ , la commutativité est

importante. Par exemple si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  alors

$$e^A \cdot e^B = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} e & e^{-1} \\ 0 & e \end{pmatrix} = e^{B+A}$$

### III Méthodes de calcul [MAN] [ROM]

**Prop 2 :** Soit  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in M_m(K)$ . Alors

$$e^D = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_m})$$

Soit  $A \in M_m(\mathbb{C})$ . Alors :  $(e^A = I_m) \Leftrightarrow (A \text{ diagonalisable et } \text{Sp}(A) \subset 2\pi i \mathbb{Z})$

**Prop 10 :** Si  $A$  est diagonalisable de valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , alors  $e^A$  est diagonalisable de valeurs propres  $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_m}$ .

**Lemme 11 :** Soit  $A \in M_m(K)$  diagonalisable. Alors il existe  $P \in GL_m(K)$  tel que  $A = P(e^A)$ .

**Prop 12 :** Soit  $A, B \in M_m(K)$  deux matrices diagonalisables tel que  $e^A = e^B$ . Alors  $A = B$ .

**Prop 13 :** Soit  $N \in M_m(K)$  nilpotente d'indice  $q \geq 1$ . Alors :

$$e^A = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k!} A^k$$

$$\text{Exemple 14 : Si } I_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ alors } e^{I_m} = \begin{pmatrix} e & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e \end{pmatrix}$$

**Théorème 15 (décomposition de Dunford) :** Soit  $A \in M_m(K)$

tel que  $X_A$  est scindé sur  $K$ . Alors il existe un unique couple  $(D, N) \in M_m(K)^2$  tel que :

•  $A = D + N$  •  $D$  est diagonalisable

•  $N$  est nilpotent •  $DN = ND$

De plus,  $D$  et  $N$  sont des polynômes en  $A$ .

**Exemple 16 :** La décomposition de Dunford de  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mais celle de } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ est } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Prop 17 :** Soit  $A = D + N$  sa décomposition de Dunford. Alors

$$\text{celle de } e^A \text{ est : } e^A = e^D + e^D (e^N - I_m)$$

**Corollaire 18 :** Soit  $A \in M_m(K)$  tel que  $X_A$  est scindé sur  $K$ .

Alors  $A$  est diagonalisable si  $e^A$  est diagonalisable.

### III Etude de la fonction exponentielle

1) Cas complexe [ROM] [MAN]

**Def 19 :** On appelle rayon spectral de  $A$  le réel

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$$

où  $\text{Sp}(A)$  est l'ensemble des valeurs propres de  $A$

$$\rho(A) = \rho(A^k) = \rho(A)^k \quad \text{et} \quad \rho(A) \leq \|A\|$$

**Def 19 :** On appelle rayon spectral de  $A$  le réel

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$$

où  $\text{Sp}(A)$  est l'ensemble des valeurs propres de  $A$

$$\rho(A) = \rho(A^k) = \rho(A)^k \quad \text{et} \quad \rho(A) \leq \|A\|$$

Soit  $A \in M_m(\mathbb{C})$ . Alors :  $(e^A = I_m) \Leftrightarrow (A \text{ diagonalisable et } \text{Sp}(A) \subset 2\pi i \mathbb{Z})$

Prop 20: Si  $\rho(A) < 1$ , la série  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} A^k}{k}$  est convergente

Def 21: Si  $\rho(A) < 1$ , on définit la fonction logarithme matriciel par:  $\ln(I_n + A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} A^k}{k}$

Prop 22: Si  $\rho(A) < 1$ ,  $\ln(I_n + A)$  est un polynôme en A

Lemme 23: Pour  $A \in M_n(\mathbb{C})$  tel que  $\rho(A) < 1$ , on a:  $\ln(I_n + A) = I_n + A$ .

Lemme 24: Soit  $A \in GL_n(\mathbb{C})$ , Alors il existe  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $A = e^{P(A)}$

Prop 25: L'application exp est surjective de  $M_n(\mathbb{C})$  dans  $GL_n(\mathbb{C})$ . DEV 2

Corollaire 26: Soit  $A \in GL_n(\mathbb{C})$  et  $P \in M^{\mathbb{R}}$ . Alors il existe une matrice  $R \in GL_n(\mathbb{C})$  tel que  $A = R^P$ .

Corollaire 27:  $GL_n(\mathbb{C})$  est connexe par arcs.

Contre-exemple 28: On a pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\exp(2ik\pi I_n) = I_n$  donc l'exponentielle de matrice définie sur  $M_n(\mathbb{C})$  n'est pas injective.

## 2) Cas réel [HAM]

Prop 29: L'application exp n'est pas surjective de  $M_n(\mathbb{R})$  dans  $GL_n(\mathbb{R})$ , car il y a des valeurs dans  $GL_n(\mathbb{R})^+$ .

Théorème 30:  $\exp(M_n(\mathbb{R})) = \{M^2; M \in GL_n(\mathbb{R})\}$  DEV 2

Contre-exemple 31: Pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , on a  $\exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ . Ainsi pour  $\theta = 2\pi$ , cette matrice admet la même exponentielle que  $I_2$ . Donc l'exponentielle de matrice définie sur  $M_n(\mathbb{R})$  n'est pas injective.

## 3) Restrictions remarquables. [CAL]

Prop 32: D'après la prop 12, si  $D_n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices diagonalisables, alors l'application exp est injective

sur  $D_n(\mathbb{R})$ .

Théorème 33 (décomposition polaire): On a les bijections:

$$1) O_n(\mathbb{R}) \times \Sigma_n^{++}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{R})$$

$$(O, S) \mapsto OS$$

$$2) U_n(\mathbb{C}) \times \Sigma_n^{++}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{C})$$

$$(U, H) \mapsto UH$$

Corollaire 34: pour tout  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ , on a:

$$\|A\| = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

En fait cela est vrai pour  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

Théorème 35:

L'application exp:  $\Sigma_n^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow \Sigma_n^{++}(\mathbb{R})$  est un homéomorphisme.

L'application exp:  $\Sigma_n^{++}(\mathbb{C}) \rightarrow \Sigma_n^{++}(\mathbb{C})$  est un homéomorphisme.

Corollaire 35 bis:  $GL_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times \Sigma_n^{++}(\mathbb{R})$  et  $GL_n(\mathbb{C}) \simeq U_n(\mathbb{C}) \times \Sigma_n^{++}(\mathbb{C})$ .

## IV Applications aux équations différentielles [BERT]

Soit I un intervalle de  $\mathbb{R}$ , on pose les équations différentielles linéaires:

$$y' = A(t)y + B(t) \quad \text{avec } (t, y) \in I \times \mathbb{R}^N \quad (Z)$$

$$\text{et } y' = A(t)y \quad \text{avec } (t, y) \in I \times \mathbb{R}^N \quad (Z_H)$$

Théorème 36 (de Cauchy-Lipschitz linéaire): Soit I un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $A \in \mathcal{C}(I, M_N(\mathbb{K}))$  et  $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^N)$ . Soit  $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^N$ . Alors il existe une unique solution  $y: I \rightarrow \mathbb{R}^N$  de (Z) tel que  $y(t_0) = y_0$ . Ces solutions sont donc globales.

Prop 37: Soit  $A \in M_N(\mathbb{K})$  (donc A est constante en t). Alors les solutions de (Z\_H) sont les:

$$y(t) = e^{tA} C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}^N$$

Pour  $t_0 \in \mathbb{R}$  et  $y_0 \in \mathbb{R}^N$ , la solution de (Z\_H) tel que  $y(t_0) = y_0$  est:  $y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0$

Exemple 18: Les solutions du système  $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2y \end{cases}$

soit  $x(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{2t}$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$   
 $y(t) = \mu e^{2t}$

Prop 39 (lemme de Duhamel): Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  ( $A$  constante en  $t$ ). Alors la solution de  $(\mathcal{L})$  tel que  $y(t_0) = y_0$  est:

$$y(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} \cdot b(s) ds$$

Lemme 40: Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  une valeur propre sur  $M_n(\mathbb{C})$  et soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. Alors il existe  $\delta > 0$  et  $\lambda > 0$  tel que  $\|e^{tA}\| \leq \lambda e^{-\delta t} \quad \forall t \geq 0$ .

Application 41 (équation de Sylvester): Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$  deux matrices dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. Alors pour tout  $C \in M_n(\mathbb{C})$ , l'équation  $AX + XB = C$  admet une unique solution dans  $M_n(\mathbb{C})$ .

DEV ?