21 Leçon 152 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Cadre

I. Généralités

1. Valeurs propres et sous-espaces propres [MAN]

   Valeurs propres, spectre, vecteurs propres, SEP, prop sur les SEP

2. Polynôme minimal et caractéristique [BER] [MAN]

   Poly minimal, poly carac, théorème de Cayley-Hamilton, toutes les multiplicités de racines, cas de l'induit

II. Diagonalisation [MAN] [GRI]

Endo diagonalisable, lemme des noyaux, équivalences de diago, cas de l'induit, co-diago

III. L'exemple des endomorphismes symétriques [MAN] [ROM]

Endo symétrique, théorème spectral, contre-exemple dans $\mathbb{C}$, matrices positives

DEV 1 : décomposition polaire

IV. Applications

1. Calcul de puissances de matrices [GRI]

   Puissances d'une matrice diago, résolution de système de suites récurrentes

2. Décomposition de Dunford [ROM] [MAN]

   Sous-espaces caractéristiques

   DEV 2 : décomposition de Dunford

3. Exponentielle de matrice [BER] [MAN] [ROM]

   Expo de matrice, propriétés, cas diagonale et diagonalisable

   DEV 2 : A est diagonalisable ssi e^A est diagonalisable

Présentation :

- OSQ en fixant une base de E, on a un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E)$ et $M_n(K)$. Cela nous permettra dans cette leçon de faire le lien entre endomorphisme et matrice, et donc d'adopter l'un des deux points de vue en fonction de la situation rencontrée.

- Lors de la réduction d'endomorphismes, on cherche à décomposer E en somme de sous-espaces stables par u, avec l'objectif que les endomorphismes induits soient plus simples à étudier. Le cas idéal est celui où les induits sont des homotéthies. Cela va conduire à la diagonalisabilité.

- Il arrive souvent que l'on ait à calculer les puissances successives d'une matrice : résoudre un système linéaire, calculer l'exponentielle de la matrice pour résoudre un système d'équations différentielles linéaires, étudier le comportement en l'infini de la suite $(A^k)_{k\geqslant 1}\dots$

  Cela peut s'avérer très fastidieux. Diagonaliser la matrice permet de complètement simplifier ce calcul.

- Le critère le plus utile pour prouver que u est diagonalisable est de trouver un polynôme annulateur scindé à racines simples, car il ne demande pas de calculer les valeurs propres. En revanche, il ne donne pas une base de vecteurs propres : il faudra déterminer une base de chaque SEP un par un en résolvant des systèmes linéaires.

- Le critère de co-diagonalisabilité est utile car permet d'exprimer les endomorphismes sous une forme simple dans la même base. Cela va être plus simple si l'on veut les additionner par exemple.

- Le théorème spectral n'est pas vrai pour des matrices symétriques complexes. En revanche, on dispose d'un énoncé analogue dans les espaces hermitiens : si $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ est une matrice hermitienne ($\bar{A}^T = A$) alors il existe $U \in U_n(\mathbb{C})$ une matrice unitaire ($\bar{U}^T U = I_n$) tel que $D = \bar{U}^T A U$ soit diagonale réelle.

- Le terme « décomposition polaire » vient sûrement de l'analogie avec l'écriture d'un nombre complexe non nul sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$. En effet, si $n = 1$, $\mathcal{H}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{R}_+^*$ et $U_1(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} = e^{i\theta}$.

- La décomposition de Dunford est essentielle car permet de calculer facilement des puissances de matrice et des exponentielle de matrice, ce qui va faciliter la résolution de systèmes linéaires ou d'équations différentielles. En effet, on se ramène à calculer des puissances de matrices diagonales et nilpotentes, ce qui est assez aisé.

Développements :

- Décomposition polaire
  - Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi, p735
  - Algèbre linéaire réduction des endomorphismes, Mansuy-Mneimné, p126
  - L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements , Isenmann-Pecatte, p128

- Décomposition de Dunford + exponentielle de matrice
  - Algèbre-Probabilités, Gourdon, p203
  - Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi, p765
  - Algèbre linéaire réduction des endomorphismes, Mansuy-Mneimné, p141

Références :

- [MAN] Algèbre linéaire réduction des endomorphismes, Mansuy-Mneimné
- [BER] Algèbre : le grand combat, Berhuy
- [GRI] Algèbre linéaire, Grifone
- [ROM] Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi

Leçon 152 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie

Soit K un corps. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

I Généralités

1) Valeurs propres et sous-espaces propres [MAN]

MAN 51 **Déf 1 :** • Une valeur propre λ de u est un scalaire tel que $u - \lambda id_E$ n'est pas injective, càd tel qu'il existe $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$.

• L'ensemble des valeurs propres de u est appelé spectre de u, noté $Sp(u)$.

• Un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ est un vecteur x non nul tel que $u(x) = \lambda x$.

• Le sous-espace propre de u associé à la vp λ est le SEV $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda id_E)$. Sa dimension est notée $m_g(\lambda)$

Prop 2 : Les SEP de u associés à des vp deux à deux distinctes sont en somme directe.

Prop 3 : Les SEP sont stables par u.

Prop 4 : Soit P un polynôme annulateur de u. Alors les vp de u appartiennent à l'ensemble des racines de P.

2) Polynôme minimal et caractéristique [BER] [MAN]

BER 44 **Déf 5 :** L'annulateur de u est l'ensemble $Ann(u) = \{P \in K[X] ;\ P(u) = 0\}$

Prop 6 : $Ann(u)$ est un idéal non nul de $K[X]$. Il existe donc un unique polynôme unitaire $\mu_u \in K[X]$ qui engendre $Ann(u)$.

Déf 7 : Le polynôme μ_u est appelé le polynôme minimal de u. C'est le polynôme unitaire de plus petit degré annulant u.

MAN 4 **Exemple 8 :** u est nilpotent d'indice q ssi $\mu_u = X^q$.

Exemple 9 : Le polynôme minimal d'un projecteur p est $X^2 - X$, sauf si p est l'identité ou l'endomorphisme nul.

Prop 10 : Les vp de u sont exactement les racines de μ_u. MAN 54
On note $m_\mu(\lambda)$ la multiplicité de λ en tant que racine de μ_u.

Déf 11 : Le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in M_n(K)$ est le polynôme unitaire χ_A de degré n défini par :
$\chi_A = \det(XI_n - A) = (-1)^n \det(A - XI_n)$

Exemple 12 : Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \in K[X]$. Sa matrice compagnon est : BER 947

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Alors : $\chi_{C_P} = P(X)$

Prop 13 : Soit $A \in M_n(K)$ et $P \in GL_n(K)$. Alors $\chi_{P^{-1}AP} = \chi_A$. MAN 54

Déf 14 : Le polynôme caractéristique de u est le polynôme caractéristique d'une matrice représentative de u dans une base quelconque. On le note χ_u.

Prop 15 : Les racines de χ_u sont exactement les vp de u.
On note $m_a(\lambda)$ la multiplicité de λ en tant que racine de χ_u.

Corollaire 16 : μ_u et χ_u ont les mêmes racines.

Prop 17 : Soit F un SEV stable par u. Soit u_F l'induit.
Alors $\mu_{u_F} \mid \mu_u$ et $\chi_{u_F} \mid \chi_u$.

Théorème 18 (de Cayley-Hamilton) : χ_u est annulateur de u : MAN 81
$\chi_u(u) = 0$. Autrement dit : $\mu_u \mid \chi_u$.

Corollaire 19 : On a : $\deg(\mu_u) \leq n$.

Prop 20 : Soit λ une valeur propre de u. Alors : MAN 84
$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$ et $1 \leq m_\mu(\lambda) \leq m_a(\lambda)$

Exemple 21 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Alors $m_\mu(1) = 2$, $m_a(1) = 4$, $m_g(1) = 3$

II Diagonalisation [MAN] [GRI] [FGN]

MAN 89 **Déf 22** : • Un endomorphisme est diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale, càd s'il existe une base de vecteurs propres ou encore si E est la somme directe des SEP.
• Une matrice est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

MAN 90 **Exemple 23** : La seule matrice nilpotente et diagonalisable est la matrice nulle.

MAN 43 **Théorème 24 (Lemme des noyaux)** : Soit $(P_1, P_2, \dots, P_N)$ une famille de polynômes deux à deux premiers entre eux et $P = P_1 \times \dots \times P_N$. Alors : $\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{h=1}^{N} \mathrm{Ker}(P_h(u))$. De plus, pour $h \in [\![1, N]\!]$, les projections $\pi_h : \mathrm{Ker}(P(u)) \to \mathrm{Ker}(P_h(u))$ sont dans $K[u]$.

GRI 166 **Théorème 25** : Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les vp de u. On a équivalence entre :
1) u est diagonalisable
2) $\dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_p} = n$
3) χ_u est scindé et pour chaque vp λ_i, $\dim(E_{\lambda_i}) = m_u(\lambda_i)$.

Corollaire 26 : Si u possède n vp distinctes, u est diagonalisable.

Exemple 27 : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

MAN 90 **Théorème 28** : On a équivalence entre :
1) u est diagonalisable
2) u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples
3) μ_u est scindé à racines simples

Exemple 29 : Les projecteurs et les symétries sont diagonalisables

Exemple 30 : Si u est de rang 1, u est diagonalisable ssi sa trace est non nulle.

Prop 31 : Soit F un SEV stable par u. Si u est diagonalisable, alors l'induit u_F est diagonalisable.

Déf 32 : Une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'endomorphismes est dite co-diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle chacun des endomorphismes u_i admet une matrice diagonale. MAN 94

Prop 33 : Soit $(u_i)_{i \in I}$ des endomorphismes diagonalisables. Alors $(u_i)_{i \in I}$ est co-diagonalisable ssi les endomorphismes commutent deux à deux.

III 1er exemple des endomorphismes symétriques [MAN] [ROM]

Dans cette partie, E désigne un espace euclidien de dim n.

Déf 34 : u est dit symétrique ou auto-adjoint si $u = u^*$, càd si $\forall x, y \in E$: $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$ MAN 124

Prop 35 : u est symétrique ssi sa matrice dans une BON est symétrique.

Lemme 36 : Soit u symétrique. Si F SEV stable par u, alors $F^\perp$ stable par u.

Prop 37 : Si u est symétrique, toutes ses vp sont réelles.

Prop 38 : Soit u symétrique. Alors ses SEP sont deux à deux orthogonaux.

Théorème 39 (spectral) : • Un endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une BON.
• Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tel que $S = O . \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) O^T$.

Contre-ex 40 : $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Déf 41 : Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique positive (resp définie positive) si elle est symétrique et $\langle x, Ax \rangle \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ (resp $\langle x, Ax \rangle > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$). On note $S_n^+(\mathbb{R})$ (resp $S_n^{++}(\mathbb{R})$). ROM 739

Prop 42 : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors A est positive (resp définie positive) ssi toutes ses vp sont positives (resp strict positives).

Théorème 43 : Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique matrice $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = B^2$. ROM 739

Théorème 44 (décomposition polaire) : Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique décomposition $A = OS$ où $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

DEV 1

Corollaire 45 : Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = OS$ où $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Application 46 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors $|||A||| = \sqrt{\rho(A^T A)}$ où ρ est le rayon spectral : $\rho(M) = \max_{\lambda \in Sp(M)} \{|\lambda|\}$

IV Applications

1) Calcul de puissances de matrices [GRI]

GRI 170 **Prop 47** : Soit $A \in M_n(K)$ diagonalisable. Alors il existe D diagonale tel que $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, et $P \in GL_n(K)$ tel que :
$\forall k \in \mathbb{N} : A^k = P . D^k . P^{-1}$ avec $D^k = diag(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$

Application 48 (résolution d'un système de suites récurrentes) :
Résoudre le système $(*) \begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases}$ tel que $\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 1 \end{cases}$

Soit $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Alors $(*) \iff X_{n+1} = A X_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Donc $X_n = A^n X_0$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il suffit de calculer A^n.

2) Décomposition de Dunford [ROM] [MAN]

ROM 111 **Déf 49** : Soit λ une vp de u. On appelle sous-espace caractéristique de u associé à λ le SEV : $N_\lambda = Ker((u - \lambda id_E)^{m_u(\lambda)})$

Prop 50 : On suppose que χ_u est scindé sur K. Alors si les vp de u sont $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, on a : $E = \bigoplus_{i=1}^{p} N_i$

MAN 141 **Théorème 51 (décomposition de Dunford)** : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé sur K. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que :
- $u = d + n$
- d est diagonalisable
- n est nilpotent
- d et n commutent

De plus, d et n sont des polynômes en u.

DEV 2

ROM 615 **Exemple 52** : La décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, mais celle de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) Exponentielle de matrice [BER] [MAN] [ROM]

Lemme 53 : Soit $A \in M_n(K)$. La série $\sum_{m \geq 0} \frac{A^m}{m!}$ est convergente. BER 987

Déf 54 : On définit l'exponentielle de A par :
$e^A = exp(A) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{A^m}{m!}$

Prop 55 : On a les propriétés suivantes :
1) e^A est un polynôme en A donc commute avec A
2) Si A et B commutent : $e^{A+B} = e^A . e^B$
3) e^A est inversible d'inverse e^{-A}
4) Si $P \in GL_n(K)$: $e^{PAP^{-1}} = P . e^A . P^{-1}$

Prop 56 : Soit $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors $e^D = diag(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$ MAN 225

Prop 57 : Si A est diagonalisable de vp $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors e^A est diagonalisable de vp $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$.

Lemme 58 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Alors il existe $P \in K[X]$ tel que $A = P(e^A)$

Prop 59 : Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisables tel que $e^A = e^B$. Alors $A = B$.

Prop 60 : Soit $A = D + N$ sa décomposition de Dunford. Alors celle de e^A est : $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$

Corollaire 61 : Soit $A \in M_n(K)$ tel que χ_A est scindé sur K. ROM 766
Alors A est diagonalisable ssi e^A est diagonalisable. DEV 2

Application 62 : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On a équivalence entre : ROM 779
$(e^A = I_n) \iff (A$ diagonalisable et $Sp(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z})$.