

19 Leçon 150 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

I. Polynômes d'endomorphismes

1. L'algèbre $K[u]$ et polynôme minimal [BER] [ROM] [MAN]

$K[u]$, lemme des noyaux, $\text{Ann}(u)$, polynôme minimal, $\dim(K[u])$, cas de l'induit

2. Eléments propres et polynôme caractéristique [MAN]

Valeurs propres, spectre, vecteurs propres, SEP, prop sur les SEP, polynôme caractéristique, cas de l'induit, racines de χ_u et de μ_u , théorème de Cayley-Hamilton, toutes les multiplicités

II. Réduction d'endomorphismes

1. Diagonalisation [MAN] [GRI]

Endomorphisme diagonalisable, équivalences diagonalisabilité, exemples, induit est diagonalisable, co-diagonalisabilité

2. Trigonalisation [MAN]

Trigonalisable, équivalences trigonalisation, induit est trigonalisable, lien dèt et trace, co-trigonalisabilité

3. Décomposition de Dunford [MAN] [ROM]

DEV 1 : décomposition de Dunford, ex et contre ex

III. Exemples et applications

1. Exponentielle de matrice [BER] [MAN] [ROM]

Expo de matrice, propriétés, cas diagonale et diagonalisable, DEV 1 : A est diagonalisable ssi e^A est diagonalisable, application, surjection sur $\text{GL}_n(\mathbb{C})$, image sur $M_n(\mathbb{R})$

2. Endomorphismes symétriques [MAN] [ROM]

Endo symétrique, prop, DEV 2 : théorème spectral, contre-exemple dans $\mathbb{C}$, matrices positives, décomposition polaire

Présentation :

- L'existence d'un polynôme P annulateur de u tel que $P(0) \neq 0$ permet de trouver une expression explicite de u^{-1} en fonction de u .
- Le lemme des noyaux est central car permet, si le poly carac est scindé, de décomposer E en somme de sous-espaces stables (les SEC).
- Lors de la réduction d'endomorphismes, on cherche à décomposer E en somme de sous-espaces stables par u , avec l'objectif que les endomorphismes induits soient plus simples à étudier. Le cas idéal est celui où les induits sont des homothéties. Cela va conduire à la diagonalisabilité.
- Il arrive souvent que l'on ait à calculer les puissances successives d'une matrice : résoudre un système linéaire, calculer l'exponentielle de la matrice pour résoudre un système d'équations différentielles linéaires, étudier le comportement en l'infini de la suite $(A^k)_{k \geq 1} \dots$
Cela peut s'avérer très fastidieux. Diagonaliser la matrice permet de complètement simplifier ce calcul.

- Le critère le plus utile pour prouver que u est diagonalisable est de trouver un polynôme annulateur scindé à racines simples, car il ne demande pas de calculer les valeurs propres. En revanche, il ne donne pas une base de vecteurs propres : il faudra déterminer une base de chaque SEP un par un en résolvant des systèmes linéaires.
- Le critère de co-diagonalisabilité est utile car permet d'exprimer les endomorphismes sous une forme simple dans la même base. Cela va être plus simple si l'on veut les additionner par exemple.
- La décomposition de Dunford est essentielle car permet de calculer facilement des puissances de matrice et des exponentielle de matrice, ce qui va faciliter la résolution de systèmes linéaires ou d'équations différentielles. En effet, on se ramène à calculer des puissances de matrices diagonales et nilpotentes, ce qui est assez aisé.
- Le théorème spectral n'est pas vrai pour des matrices symétriques complexes. En revanche, on dispose d'un énoncé analogue dans les espaces hermitiens : si $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ est une matrice hermitienne ($\bar{A}^T = A$) alors il existe $U \in U_n(\mathbb{C})$ une matrice unitaire ($\bar{U}^T U = I_n$) tel que $D = \bar{U}^T A U$ soit diagonale **réelle**.
- Le terme « décomposition polaire » vient sûrement de l'analogie avec l'écriture d'un nombre complexe non nul sous la forme $z = r e^{i\theta}$ avec $r > 0$. En effet, si $n = 1$, $\mathcal{H}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{R}_+^*$ et $U_1(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} = e^{i\theta}$.

Développements :

- Décomposition de Dunford + exponentielle de matrice
 - Algèbre-Probabilités, Gourdon, p203
 - Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi, p765
 - Algèbre linéaire réduction des endomorphismes, Mansuy-Mneimné, p141
- Théorème spectral
 - Algèbre linéaire-réduction des endomorphismes, Mansuy-Mneimné, p124
 - Algèbre linéaire, Grifone, p256

Références :

- [BER] Algèbre : le grand combat, Berhuy
- [ROM] Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi
- [MAN] Algèbre linéaire réduction des endomorphismes, Mansuy-Mneimné
- [GRI] Algèbre linéaire, Grifone

Leçon 150 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie.

Situation d'un endomorphisme en dimension finie. Applications

Soit K un corps. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $m \in \mathcal{L}(E)$.

I Polynômes d'endomorphismes

1) L'algèbre $K[m]$ et polynôme minimal $[P_m]$ [BER] [FOR] [MAN]

Def 1: Soit $P(X) = \sum_{i=0}^p a_i X^i \in K[X]$ et $m \in \mathcal{L}(E)$. On pose $P(m) = a_p m^p + \dots + a_1 m + a_0 \text{id}_E \in \mathcal{L}(E)$. Un tel endomorphisme est appelé un polynôme d'endomorphisme en m . On note $K[m] = \{P(m); P \in K[X]\}$.

Prop 2: $K[m]$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ et $\dim(K[m]) \leq n$.

Lev 3 (des noyaux): Soit $P_1, \dots, P_n$ des polynômes denses à deux premiers entre eux et $m \in \mathcal{L}(E)$. Alors:

$\text{Ker}(P_1 P_2 \dots P_n)(m) = \bigoplus_{i=1}^n \text{Ker } P_i(m)$. De plus, le projecteur de $\text{Ker}(P_1 P_2 \dots P_n)(m)$ sur $\text{Ker } P_i(m)$ de ces sous-espaces parallèlement à la somme des autres appartient à $K[m]$.

Def 4: L'annulateur de m est l'ensemble

$$A_m(m) = \{P \in K[X]; P(m) = 0\}$$

Prop 5: $A_m(m)$ est un idéal non nul de $K[X]$. Il existe donc un unique polynôme unitaire $p_m \in K[X]$ qui engendre $A_m(m)$.

Def 6: Le polynôme p_m est appelé le polynôme minimal de m .

Prop 7: $\dim(K[m]) = \deg(p_m)$.

Exemple 8: m est nilpotent d'indice n si $p_m = X^n$.

Exemple 9: Si p est un projecteur, $p^2 = p$ et p n'est pas l'identité ou l'application nulle.

Prop 10: Soit F SEV de E stable par m . Alors le polynôme minimal de $m|_F$ divise p_m .

2) Éléments propres et polynôme caractéristique [MAN]

Def 11: Une valeur propre λ de m est un scalaire tel que $m - \lambda \text{id}_E$ n'est pas injective. L'ensemble des valeurs propres de m est appelé 'spectre' de m et est noté $\text{Sp}(m)$.

Un vecteur propre de m associé à la valeur propre λ est un vecteur α non nul tel que $m(\alpha) = \lambda \alpha$.

Le sous-espace propre de m associé à la valeur propre λ est $E_\lambda = \text{Ker}(m - \lambda \text{id}_E)$. On note $\text{rg}(\lambda)$ sa dimension.

Prop 12: Les SEV de m associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.

Prop 13: Les SEV sont stables par m .

Prop 14: Soit P annulateur de m . Alors les valeurs propres de m appartiennent à l'ensemble des racines de P .

Prop 15: Les valeurs propres de m sont exactement les racines de son polynôme minimal p_m . On note $\text{mm}(m)$ la multiplicité de λ en tant que racine de p_m .

Def 16: Soit $A \in M_n(K)$. Le polynôme caractéristique de A est: $\chi_A(X) = \det(X I_n - A) = (-1)^n \det(A - X I_n)$.

Prop 17: Soit $A \in M_n(K)$ et $P \in \mathcal{L}_n(K)$. Alors $\chi_{PAP} = \chi_A$.

Def 18: Le polynôme caractéristique de m est le polynôme caractéristique de l'importe laquelle de ses matrices.

Prop 19: Soit F un SEV stable par m . Soit m_F l'induit. Alors χ_{m_F} divise χ_m .

Prop 20: Les racines de χ_m sont exactement les valeurs propres de m . On note $\text{ma}(m)$ la multiplicité de λ en tant que racine de χ_m .

Théorème 21 (de Cayley-Hamilton): χ_m est annulateur de m . Ainsi, $p_m \mid \chi_m$.

Corollaire 22: $\deg(p_m) \leq \dim(E)$.

Prop 23: Soit λ valeur propre de m . Alors:

$$1 \leq \text{rg}(\lambda) \leq \text{ma}(\lambda) \quad \text{et} \quad 1 \leq \text{mm}(\lambda) \leq \text{ma}(\lambda).$$

Corollaire 24: Si x_n est scindé sur K , alors E est la somme directe des sous-espaces caractéristiques de n .

II Réduction d'endomorphismes

1) Diagonalisation [MAN][GRI]

Def 25: On dit que n est diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale, c'est-à-dire s'il existe une base de vecteurs propres, c'est-à-dire si E est la somme directe des SEP.

Une matrice est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Exemple 26: La seule matrice nilpotente et diagonalisable est la matrice nulle.

Théorème 27: Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de n . On a équivalence entre:

1) n est diagonalisable 2) $\dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_p}) = n$

2) x_n est scindé sur K et $\dim(E_{\lambda_i}) = m_i(\lambda_i) \forall i \in \{1, \dots, p\}$

Corollaire 28: Si n possède n valeurs propres deux à deux distinctes, alors n est diagonalisable.

Théorème 29: On a équivalence entre:

1) n est diagonalisable

2) n admet un polynôme annulateur scindé à racines simples

3) n est scindé à racines simples.

Exemple 30: Les projecteurs et symétries sont diagonalisables.

Prop 31: Soit n diagonalisable et $F \subseteq E$ stable par n . Alors n induit n_F est diagonalisable.

Def 32: Une famille $(m_i)_{i \in I}$ d'endomorphismes est dite ca-diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle chacun des m_i admet une matrice diagonale.

Prop 33: Soit $(m_i)_{i \in I}$ des endomorphismes diagonalisables.

Alors la famille $(m_i)_{i \in I}$ est ca-diagonalisable si

les endomorphismes commutent deux à deux.

2) Trigonalisation [MAN]

Def 34: On dit que n est trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire.

Théorème 35: On a équivalence entre:

1) n est trigonalisable 2) n admet un polynôme annulateur scindé.

3) n est scindé 4) x_n est scindé.

Corollaire 36: Tout endomorphisme d'un E sur F est trigonalisable.

Prop 37: Soit n trigonalisable et $F \subseteq E$ stable par n . Alors n induit n_F est trigonalisable.

Corollaire 38: Soit n trigonalisable. Alors la trace et le déterminant de n sont respectivement la somme et le produit des valeurs propres.

Def 39: Une famille $(m_i)_{i \in I}$ d'endomorphismes est dite ca-trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle chacun des m_i admet une matrice triangulaire.

Prop 40: Soit $(m_i)_{i \in I}$ des endomorphismes qui commutent deux à deux. Alors la famille $(m_i)_{i \in I}$ est ca-trigonalisable.

3) Décomposition de Dunford [MAN][POM]

Théorème 41 (Décomposition de Dunford): Soit $n \in \mathcal{L}(E)$ tel que x_n est scindé sur K . Alors il existe une unique couple (d, n) de $\mathcal{L}(E)^2$ tel que:

$\bullet n = d + n$ $\bullet n$ et d commutent $\bullet n$ est nilpotente $\bullet d$ est diagonalisable.

De plus, d et n sont des polynômes en n .

Exemple 42: La décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, mais celle de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

III Exemples et applications

1) Exponentielle de matrice [BER][MAN][POM]

Def 43: Soit $A \in M_n(K)$. On définit l'exponentielle de A par

par: $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$

Prop 44: On a les propriétés suivantes:

- 1) e^A est un polynôme en A donc commute avec A
- 2) Si A et B commutent; $e^{A+B} = e^A e^B$
- 3) e^A est inversible d'inverse e^{-A}
- 4) Si: $P \in GL_n(K)$: $e^{PAP^{-1}} = P e^A P^{-1}$

Prop 45: Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors $e^A = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$

Prop 46: Si A est diagonalisable alors e^A est diagonalisable et $\text{Sp}(e^A) = \{e^{\lambda}; \lambda \in \text{Sp}(A)\}$.

Prop 47: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $A = D + N$ sa décomposition de Dunford. Alors la décomposition de Dunford de e^A est: $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$.

Corollaire 48: Soit $A \in M_n(K)$ tel que $\text{Re} \lambda$ est strictement négatif. Alors A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Application 49: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On a l'équivalence: $A = I_n \iff (A \text{ est diagonalisable et } \text{Sp}(A) \subset \mathbb{C} \setminus \{1\})$

Lemme 50: Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = e^{P(A)}$.

Prop 51: L'application exp est surjective de $M_n(\mathbb{C})$ dans $GL_n(\mathbb{C})$.

Application 52: $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Prop 53: Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On a équivalence entre:

- 1) $\exists B \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $A = e^B$.
- 2) $\exists R \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = R^2$.

2) Endomorphismes Symétriques [MAN] [KOR]

Soit E un espace euclidien de dimension n .

Def 54: On dit que $m \in L(E)$ est symétrique si $m = m^*$

Cad si $\forall x, y \in E, \langle mx, y \rangle = \langle x, my \rangle$

Prop 55: m est symétrique ssi sa matrice dans une BON est symétrique.

Lemme 56: Soit m symétrique et F SEV stable par m . Alors $F^\perp$ est stable par m .

Prop 57: Si m est symétrique, toutes ses valeurs propres sont réelles.

Prop 58: Soit m symétrique. Alors les SEP sont deux à deux orthogonaux.

Théorème 59 (spectral): Soit un endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une BON.
Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale tel que $S = O D O^T$.

Contre-ex 60: $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Théorème 61: Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique matrice $P \in S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = B^2$.

Théorème 62 (décomposition polaire): Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique décomposition $A = OS$ où $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Corollaire 63: Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = OS$ où $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.