

17 Leçon 148 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

I. Espaces vectoriels et dimension

1. Familles libres, génératrices, bases [GRI]

Famille génératrice, EV de dimension finie, famille libre, base, coordonnées dans une base, exemples, théorème de la base extraite, théorème de la base incomplète

2. Théorie de la dimension [GRI] [GOU]

Lemme fondamental, dimension d'un EV, dimension du produit, famille libre/génératrice et cardinal, SEV de dimension finie, formule de Grassmann, équivalences pour être supplémentaire

II. Théorie du rang

1. Rang d'une application linéaire [GRI]

Rang de f , isomorphisme ssi même dimension, théorème du rang, équivalences pour que f soit bijective

2. Rang d'une matrice [GOU] [GRI]

Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $M_{p,q}(K)$, rang d'une famille de vecteurs, rang d'une matrice, matrices équivalentes et rang, pivot de Gauss

III. Applications de la dimension finie

1. Espaces vectoriels normés [GOU2] [IP] [BERT]

Equivalence des normes en dimension finie, tous les corollaires avec les contre-exemples, théorème de Riesz, structure des solutions pour une équation différentielle linéaire homogène

2. Réduction des endomorphismes [BER] [MAN]

Annulateur de u , existence d'un polynôme annulateur, polynôme minimal, critère de diag et de trigo, [DEV 1 : Famille co-trigonalisable](#)

3. Extensions de corps [PER]

Extension, degré de l'extension, théorème de la base télescopique, éléments algébriques/transcendants, polynôme minimal, [DEV 2 : caractérisation des nombres algébriques](#)

Présentation :

- Le théorème de la base incomplète est aussi vrai en dimension infinie, mais il nécessite l'axiome du choix.
- Très souvent, pour montrer que deux espaces vectoriels sont égaux, on montre une inclusion puis on montre qu'ils ont même dimension.
- OSQ en fixant une base de E , on a un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E)$ et $M_n(K)$. Cela nous permettra dans cette leçon de faire le lien entre endomorphisme et matrice, et donc d'adopter l'un des deux points de vue en fonction de la situation rencontrée.
- La co-trigonalisation a sa place en tant que développement dans cette leçon, car dans la preuve on effectue deux récurrences sur la dimension de E . C'est une technique assez fréquente en algèbre linéaire (par exemple pour démontrer le théorème spectral).
- Le théorème de la base télescopique utilise seulement des arguments d'algèbre linéaire, et est crucial dans la théorie des extensions de corps.

Développements :

- Co-trigonalisabilité
 - Algèbre linéaire réduction des endomorphismes, Mansuy-Mneimné, p94-104-107
 - Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi, p685 et 678
- Nombres algébriques
 - Cours d'algèbre, Perrin, p66
 - Théorie de Galois, Gozard, p31
 - Algèbre Tome 4, Szpirglas, p27

Références :

- [GRI] Algèbre linéaire, Grifone
- [GOU] Algèbre-Probabilités, Gourdon
- [GOU2] Analyse, Gourdon
- [IP] L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements , Isenmann-Pecatte
- [BERT] Equations différentielles, Berthelin
- [BER] Algèbre : le grand combat, Berhuy
- [MAN] Algèbre linéaire réduction des endomorphismes, Mansuy-Mneimné
- [PER] Cours d'algèbre, Perrin

Def 14.8: Dimension d'un espace vectoriel. Exemples et applications

Soit K un corps et E un K -espace vectoriel.

1. Espaces vectoriels et dimension

1) Familles libres, génératrices, bases [GRI]

Def 1: Une famille de vecteurs $\{v_1, \dots, v_p\}$ de E est dite génératrice ssi $E = \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$, c.à.d. $\forall x \in E, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$ tel que $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i$.

Def 2: On dit que E est de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie. Sinon on dit qu'il est de dimension infinie.

Exemple 3: K^n est de dimension finie, mais pas $\mathbb{R}[X]$.

Def 4: On dit que la famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ de E est libre

ssi: $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$.

On dit que ces vecteurs sont linéairement indépendants. Une famille qui n'est pas libre est liée.

Exemple 5: Dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ où $f_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est tel que $f_\lambda(x) = x\lambda$, est libre.

Def 6: On appelle base une famille $\mathcal{B}$ la fois libre et génératrice.

Prop 7: Une famille $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une base de E ssi tout $x \in E$ se décompose de façon unique sur les v_i : $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ et le n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est unique.

Exemple 8: a) Soit $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in K^n$. Alors la famille $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de K^n .

b) La famille $(1, x, \dots, x^{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Prop 9: Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice.

Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

On suppose désormais que E est de dimension finie.

Théorème 10: Soit $\mathcal{B} \neq \{0\}$. Soit $\mathcal{B}$ une famille génératrice et $\mathcal{L}$ une famille libre avec $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$. Il existe alors

une base $\mathcal{B}$ tel que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{B}$.

Corollaire 11: • De toute famille génératrice on peut extraire une base (théorème de la base extrême).

Toute famille libre peut être complétée pour former une base (théorème de la base incomplète).

2) Théorie de la dimension [GRI][GOU]

Lemme 12: Si E est engendré par n éléments, toute famille contenant plus de n éléments est liée.

Théorème 13: Toutes les bases de E ont même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé dimension de E noté $\dim(E)$.

Exemple 14: $\dim_K(K^n) = n$; $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$; $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$;

$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$.

Prop 15: Soit F un E de dimension finie. Alors:

$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$.

Théorème 16: Soit $\dim(E) = n$. Alors:

• Toute famille génératrice ayant n éléments est une base.

• Toute famille libre ayant n éléments est une base.

Prop 17: Soit F un SEV de E . Alors F est de dimension finie avec $\dim(F) \leq \dim(E)$. De plus, $\dim(F) = \dim(E)$ ssi $F = E$.

Prop 18 (formule de Grassmann): Soit E_1, E_2 des SEV de E .

Alors: $\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2)$.

Corollaire 19: Soit E_1, E_2 deux SEV de E . On a équivalences:

1) $E = E_1 \oplus E_2$

2) $\dim(E) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$ et $E_1 \cap E_2 = \{0\}$

3) $\dim(E) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$ et $E = E_1 + E_2$.

III Théorie du rang

1) Rang d'une application linéaire [GRI]

Soit E' un E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, E')$.

Def 20: $f(E)$ est un SEV de E' appelé image de f , noté $\text{Im}(f)$.

On appelle rang de f la dimension de $\text{Im}(f)$, noté $\text{rang}(f)$.

Théorème 21: Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont même dimension.

Exemple 22: $\mathbb{R}_n[x] \simeq \mathbb{R}^{n+1}$

Théorème 23 (du rang): Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$. Alors:

$$\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker } f).$$

Corollaire 24: Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$ avec $\dim(E) = \dim(E')$.

On a équivalence entre:

f injective $\Leftrightarrow f$ surjective $\Leftrightarrow f$ bijective.

Contre-ex 25: Ce résultat est faux en dimension infinie.

Par exemple, $f: \mathbb{N}[x] \rightarrow \mathbb{N}[x], p \mapsto p'$ est surjective

mais non injective.

2) Rang d'une matrice [Cov][C.Ri]

Soit E de dimension q et F de dimension p .

Prop 26: Soit p une base de E et p' une base de F . On a

un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $M_{p,q}(K)$.

Ainsi: $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(M_{p,q}(K)) = p \cdot q = \dim(E) \cdot \dim(F)$.

Déf 27: On appelle rang de la famille $\{v_i\}_{i \in I}$ la

dimension de l'espace engendré par les vecteurs v_i .

Soit $A \in M_{p,q}(K)$. On appelle rang de A le rang de la

famille des vecteurs colonnes de A .

Prop 28: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et A la matrice associée à f

dans des bases quelconques. Alors: $\text{rg}(f) = \text{rg}(A)$.

Remarque 29: Si $A \in M_{p,q}(K)$, $\text{rg}(A) \leq \inf\{p, q\}$

o. Si $A \in M_n(K)$, A est inversible ssi $\text{rg}(A) = n$.

Théorème 30: Soit $A \in M_{p,q}(K)$. Si $\text{rg}(A) = r > 0$, alors A

est équivalente à $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Corollaire 31: Deux matrices $A, B \in M_{p,q}(K)$ sont

équivalentes ssi $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$.

Méthode 32: On ne change pas le rang d'une matrice

en effectuant des opérations élémentaires. Ainsi pour

déterminer le rang de A , on utilise en pratique l'algorithme du pivot de Gauss.

Exemple 33: Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $\text{rg}(A) = 2$.

III Applications de la dimension finie.

1) Espaces vectoriels normés [Cov][IP][PERT]

Théorème 34: Dans un espace vectoriel normé de dimension

finie, toutes les normes sont équivalentes.

Contre-ex 35: C'est faux en dimension infinie. Par exemple

dans $\mathcal{L}([0,1], \mathbb{R})$ les normes $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ et

$\|f\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$ ne sont pas équivalentes. Il suffit de

considérer $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \max(1-xn, 0)$ $\forall n \geq 1$

Corollaire 36: Toute application linéaire d'un EVN de

dim finie dans un EVN quelconque est continue.

Contre-ex 37: C'est faux en dim infinie. Prendre

$\|f\|_\infty$ normé de $\|f\|_1 = \sup |f|$. Alors $p \mapsto p'$ est linéaire

mais pas continue.

Corollaire 38: Tout EVN de dim finie est complet.

Tout SEV de dimension finie d'un EVN est fermé.

Exemple 39: L'exponentielle matricielle est un polynôme

en la matrice: $e^A \in K[A]$.

Corollaire 40: Les compacts d'un EVN de dim finie

sont les fermés-bornés.

Exemple 41: On $(\mathbb{R})$ est compact dans $M_n(\mathbb{R})$.

Contre-ex 42: C'est faux en dim infinie. Prendre $\|f\|_\infty$

normé de $\|f\|_1 = \sup |f|$. Alors $B = \{f \in M([0,1], \mathbb{R}) : \|f\|_1 \leq 1\}$

est fermé-borné mais pas compact (prendre $(x^n)_{n \geq 0}$).

On a en fait un résultat général:

Théorème 43 (de Riesz): Un EVN E est de dimension

finie ssi sa boule unité fermée est compacte

2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A \in \mathcal{C}(I, M_n(K))$ et $B \in \mathcal{C}(I, K^n)$
 Soit S_H l'ensemble des solutions de : $y' = A(y)$ ($\mathbb{Z}_H$)
 Prop 44: 1) S_H est un SEV de $\mathcal{C}(I, K^n)$ et on
 2) $\forall t_0 \in I$, l'application $\Phi_{t_0}: S_H \rightarrow K^n$ est un
 isomorphisme d'espaces vectoriels.
 3) S_H est de dimension n .

2) Réduction des endomorphismes [DER][MAN]

Soit E un K -ev de dimension finie et $m \in \mathbb{Z}(E)$.

Def 45: l'ensemble $\text{Ann}(m) = \{P \in K[X]; P(m) = 0\}$ est appelé l'annulateur de m .

Prop 46: Tout endomorphisme d'un EV de dimension finie admet un polynôme annulateur non nul.

Prop 47: $\text{Ann}(m)$ est un idéal non nul de $K[X]$. Ainsi il existe un unique polynôme unitaire $p_m \in K[X]$ qui engendre $\text{Ann}(m)$.

Def 48: p_m est appelé le polynôme minimal de m .

Corollaire 49: $\dim(K[m]) = \deg(p_m)$.

Théorème 50: Soit $m \in \mathcal{L}(E)$. On a:

- 1) m est diagonalisable ssi p_m est scindé en racines simples
- 2) m est trigonalisable ssi p_m est scindé.

Corollaire 51: Un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel est trigonalisable.

Def 52: Une famille d'endomorphismes $(m_i)_{i \in I}$ est dite co-trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle chacun des m_i admet une matrice triangulaire.

Prop 53: Soit $(m_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes trigonalisables de E qui commutent deux à deux. Alors cette famille est co-trigonalisable.

Remark 54: La réciproque est fautive.

DEV

3) Extensions de corps [PER]

Soit K et L des corps commutatifs

Def 55: Soit $K \subset L$. On dit que L est une extension de K .

Prop 56: Si L/K extension de corps, L est un K -espace vectoriel.

Def 57: On appelle degré de l'extension L/K la dimension de L comme K -ev. On la note $[L:K]$.

Remarque 58: Si K et L sont des corps finis, on a $|L| = |K|^n$ avec $n = [L:K]$.

Théorème 59 (de la base télescopique): Soit L/K et M/L des extensions de corps. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de L sur K et $(f_j)_{j \in J}$ une base de M sur L . Alors la famille $(e_i f_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est une base de M sur K .

Corollaire 60: Si les extensions sont finies, on a:

$[M:K] = [M:L] \cdot [L:K]$.

Def 61: Soit L/K extension et $d \in L$. Soit $\varphi: K[X] \rightarrow L$ tel que $\varphi(X) = P(d)$. $\forall P \in K[X]$.

- 1) Si φ est injectif, on dit que d est transcendant sur K .
- 2) Sinon on dit que d est algébrique sur K . Il existe alors un unique polynôme P non nul unitaire et irréductible qui s'annule en d . On dit que P est le polynôme minimal de d sur K .

Exemple 62: $\sqrt{2}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$, le polynôme minimal $X^2 - 2$.

Théorème 63: Soit L/K extension et $d \in L$. On a l'équivalence entre:

- 1) d est algébrique sur K
- 2) $K[d] = K(d)$
- 3) $[K(d):K] < +\infty$

Exemple 64: $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}): \mathbb{Q}] = 2$

$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}): \mathbb{Q}] = 4$

3