

7 [META PLAN] Leçon 108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

I. Parties génératrices d'un groupe

1. Définitions et premières propriétés [BER]

Intersection de sous-groupes, sous-groupe engendré, description de $\langle X \rangle$, partie qui engendre

2. Ordre d'un élément [BER]

Théorème de Lagrange, ordre d'un élément, caractérisation de l'ordre, ordre de x^d

3. Groupes monogènes et groupes cycliques [ROM]

Groupe monogène, groupe cyclique, exemples, lien avec $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, générateurs d'un groupe cyclique, groupe d'ordre p premier, indicatrice d'Euler, sous-groupe d'un groupe cyclique, DEV 1 : $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times$ est cyclique, CNS de cyclicité pour $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$

II. Le groupe symétrique

1. Systèmes de générateurs [BER]

Déf de $\mathcal{S}_n$, décomposition en produit de cycles, les cycles engendrent $\mathcal{S}_n$, les transpositions engendrent $\mathcal{S}_n$, ordre d'un cycle, ordre d'une permutation, autres générateurs de $\mathcal{S}_n$

2. Groupe alterné [BER] [ROM]

Signature, exemples, groupe alterné, générateurs de $\mathcal{A}_n$, DEV 2 : sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_n$, $\mathcal{A}_n$ est simple, centre de $\mathcal{S}_n$

III. Le groupe linéaire [ROM]

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, matrice de transvection, matrice de dilatation, décomposition en produit de transvection et dilatation, générateurs de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, générateurs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs, opérations sur les lignes et les colonnes, lien avec le pivot de Gauss

Présentation :

- La notion de partie génératrice est très utile pour montrer des propriétés sur des groupes. Par exemple, si H et H' sont deux groupes et que l'on veut montrer que $H \subset H'$, si l'on dispose d'une partie génératrice P de H , alors il faut et il suffit de montrer que $P \subset H'$. Cette méthode marche aussi pour montrer qu'un sous-groupe est distingué par exemple.
- Ainsi l'intérêt des parties génératrices est de réduire l'étude d'un groupe à ses générateurs, un peu comme les bases pour les espaces vectoriels de dimension finie.

Développements :

- $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times$ est cyclique
- Rombaldi et Perrin
- Sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_n$
- Algèbre : le grand combat, Berhuy, p215
- Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi, p49

Références :

- [BER] Algèbre : le grand combat, Berhuy
- [ROM] Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi