13 [META PLAN] Leçon 127 : Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications.

I. Nombres remarquables

1. L'exemple de e et π [TAU]

Fonction exponentielle, prop, nombre d'Euler e

Morphisme $t \mapsto e^{it}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$, dèf de π avec le noyau

2. Nombres rationnels et irrationnels [$\varnothing$] [DUV]

Dèf de $\mathbb{Q}$ corps des fractions de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ est le plus petit corps de carac 0, nombre irrationnel, exemples de $\sqrt{2}, \pi, e$, irrationnalité de $\sqrt{d}$ quand d n'est pas un carré parfait

3. Nombres premiers [ROM]

Nombre premier, exemples, théorème fondamental de l'arithmétique, lien avec le PGCD et PPCM, infinité des nombres premiers, théorème de Fermat, indicatrice d'Euler

4. Carrés dans un corps finis [PER]

Toutes les propriétés des carrés dans $\mathbb{F}_q$

II. Eléments et extensions algébriques [PER]

Elements algébriques/transcendants, exemples, polynôme minimal, DEV 1 : caractérisation des nombres algébriques, extension finie, extension algébrique, DEV 1 : corps des éléments algébriques, contre-exemple avec $\bar{\mathbb{Q}}$, $\bar{\mathbb{Q}}$ est la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$

III. Racines de l'unité et polynômes cyclotomiques [TL1] [PER] [IP]

Racine n-ième de l'unité, exemples de $\mathbb{U}_n$, racine de l'unité, $\mathbb{U}_n$ groupe cyclique, sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$, racine primitive n-ième de l'unité

$\mathbb{U}_n = \bigsqcup_{d|n|} \mathbb{U}_d^*$, $n = \sum \varphi(d)$

Théorème de Kronecker

Polynômes cyclotomiques, toutes les propriétés, DEV 2 : Irréductibilité de $\Phi_n(X)$ + polynôme minimal d'une racine primitive n-ième de l'unité

Présentation :

- La fonction exponentielle nous permet surtout d'avoir une notation plus compacte et très maniable des nombres complexes : l'écriture exponentielle.

  C'est aussi un moyen de définir le nombre π.

- Une des utilités des nombres premiers est de trouver une « décomposition atomique » des nombres entiers.

- Il existe encore beaucoup de problèmes non-résolus sur les nombres premiers : il n'y a par exemple aucune formule explicite pour tous les atteindre.

- On peut montrer que $\bar{\mathbb{Q}}$ est dénombrable et comme $\mathbb{R}$ est indénombrable, cela justifie l'existence d'éléments transcendants.

- Les racines de l'unité sont des nombres bien spécifiques avec de nombreuses propriétés. Par exemple, les racines primitives n-ièmes de l'unité permettent de définir les polynômes cyclotomiques. Ceux-ci sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$, ce qui permet d'obtenir de nouvelles extensions de corps.

Développements :

- Nombres algébriques
  - Cours d'algèbre, Perrin, p66
  - Théorie de Galois, Gozard, p31
  - Algèbre Tome 4, Szpirglas, p27
- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques + degré d'une extension cyclotomique
  - Théorie de Galois, Gozard, p69
  - Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi, p384
  - Cours d'algèbre, Perrin, p80

Références :

- [TAU] Analyse complexe pour la Licence 3, Tauvel
- [DUV] Théorie des nombres, Daniel Duverney
- [ROM] Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi
- [PER] Cours d'algèbre, Perrin
- [TL1] Tout en un pour la licence 1
- [IP] L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements , Isenmann-Pecatte