

6 Leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

I. Généralités sur le groupe linéaire

1. Définition et premières propriétés [ROM]

Groupe linéaire, équivalences

2. Déterminant et groupe spécial linéaire [ROM]

Application $\det$, $SL_n(K)$, prop, centre de $GL(E)$ et $SL(E)$

3. Topologie de $GL(E)$ [ROM] [CAL]

DEV 1 : $GL_n(\mathbb{C})$ est dense, ouvert, connexe par arcs, applications

II. Générateurs de $GL(E)$ et $SL(E)$ [ROM]

Transvection, prop, équivalences, dilatation, prop, équivalence, générateurs

III. Actions sur les espaces de matrices

1. Action par translation [ROM]

Action par translation à gauche et à droite, opérations élémentaires, matrice échelonnée-réduite, pivot de Gauss

2. Action par équivalence [ROM]

Matrices équivalentes, lien avec le rang

3. Action par conjugaison [ROM]

Matrices semblables, invariants de similitude, exemple pour les matrices diagonalisables

IV. Un sous-groupe de $GL(E)$: le groupe orthogonal [ROM]

Isométrie, groupe orthogonal, équivalences pour être une isométrie, matrice orthogonale, groupe spécial orthogonal, matrice symétrique positive, équivalence avec les valeurs propres, racine carrée, DEV 2 : décomposition polaire, corollaire sur le rayon spectral

Présentation :

- Comme $GL_n(K)$ est dense dans $M_n(K)$, il est judicieux de s'y intéresser car après en utilisant des outils d'analyse on pourra généraliser des résultats à $M_n(K)$.
- Comme générateurs de $GL(E)$, on cherche les générateurs les plus simples possibles, donc comme pour les transpositions dans $\mathcal{S}_n$, ayant le plus de points fixes possibles. Ici cela correspond à laisser fixe un hyperplan.
- Pour $K = \mathbb{R}$, on peut restreindre l'action par translation à gauche au sous-groupe $O_n(\mathbb{R})$ de $GL_n(\mathbb{R})$, et le théorème de décomposition polaire nous donne un représentant symétrique positif d'une matrice carrée pour cette action.

Dans le cas d'une matrice inversible, il existe un unique représentant symétrique défini positif.

Développements :

- $GL_n(\mathbb{C})$ est dense, ouvert, connexe par arcs.
 - Carnet de voyage en Algèbre, Caldero-Peronnier, p143
- Décomposition polaire

- Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi, p735
- Algèbre linéaire-réduction des endomorphismes, Mansuy-Mneimné, p126
- L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements , Isenmann-Pecatte, p128

Références :

- [ROM] Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi
- [CAL] Carnet de voyage en Algérie, Caldero-Peronnier

Léon 106: Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

Soit K un corps commutatif et E un K -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

I Généralités sur le groupe linéaire

1) Définition et premières propriétés [ROM]

Déf 1: On définit $GL(E)$, appelé groupe linéaire, comme le groupe des automorphismes de E .

On note $GL_n(K)$ le groupe des matrices inversibles de $M_n(K)$.

Remarque 2: Le choix d'une base de E permet de réaliser un isomorphisme de groupes de $GL(E)$ sur $GL_n(K)$.

Théorème 3: Soit $m \in \mathbb{Z}(E)$. Il y a équivalence entre:

- 1) $m \in GL(E)$
- 2) $\text{Ker}(m) = \{0\}$
- 3) $\text{Im}(m) = E$
- 4) $\text{rg}(m) = n$
- 5) $\det(m) \neq 0$
- 6) m transforme toute base de E en une base de E
- 7) Il existe $v \in \mathbb{Z}(E)$ tel que $mv = \text{id}$.
- 8) Il existe $w \in \mathbb{Z}(E)$ tel que $wm = \text{id}$.

Exemple 4: Pour $\lambda \in K^*$, l'homothétie $x \mapsto \lambda x$ est un élément de $GL(E)$, d'inverse l'homothétie de rapport $1/\lambda$.

2) Déterminant et groupe spécial linéaire [ROM]

Prop 5: L'application $\det: GL(E) \rightarrow K^*$ est un morphisme de groupes surjectif.

Déf 6: On appelle groupe spécial linéaire, noté $SL(E)$, le noyau de l'application $\det$. Ainsi $SL(E) = \{m \in \mathbb{Z}(E); \det(m) = 1\}$. De même: $SL_n(K) = \{A \in M_n(K); \det(A) = 1\}$.

Prop 7: $SL(E)$ est un sous-groupe distingué de $GL(E)$, isomorphe à $SL_n(K)$. On a un isomorphisme de groupes entre $GL(E)/SL(E)$ et K^* .

Théorème 8: On a que $\mathbb{Z}(GL(E)) = K^* \cdot \text{id}$ et $\mathbb{Z}(SL(E)) = \mu_n(K) \cdot \text{id}$ où $\mu_n(K)$ est le groupe des racines n -ièmes de l'unité dans K^* .

3) Topologie de $GL(E)$ [ROM][CAL]

Il: $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On munit $\mathbb{Z}(E)$ de la norme: $\forall m \in \mathbb{Z}(E)$, $\|m\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|m(x)\|}{\|x\|}$ où $\| \cdot \|$ est une norme sur E .

Prop 9: $GL_n(K)$ est dense et ouvert dans $M_n(K)$.

Prop 10: $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe dans $M_n(\mathbb{C})$.

(Contre-ex 11: $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe

Application 12: $\forall A, B \in M_n(K)$ on a $ABA = ABA$.

Application 13: L'application $m \mapsto m^{-1}$ est continue sur $GL(E)$.

II Générateurs de $GL(E)$ et $SL(E)$ [ROM]

Déf 14: Soit ℓ une forme linéaire non nulle sur E . On appelle transvection d'hyperplan $\text{Ker}(\ell)$ toute application $m \in \mathbb{Z}(E)$ définie par: $\forall x \in E, m(x) = x + \ell(x)a$ où $a \in \text{Ker}(\ell)$. On note $T_{\ell,a}$ une telle transvection.

Prop 15: Une transvection $T_{\ell,a}$ est dans $GL(E)$, d'inverse $T_{\ell,-a}$.

Le conjugué dans $GL(E)$ d'une transvection est une transvection.

Théorème 16: Soit $m \in \mathbb{Z}(E) \setminus \{id\}$. On a équivalence entre:

- 1) m est une transvection
- 2) il existe une base de E dans laquelle la matrice de m est: $T_m = \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) il existe une base dans laquelle la matrice de m est $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ avec $i \neq j \leq n$ et $\lambda \in K^*$

4) $\text{rg}(m - id) = 1$ et $\chi_m(x) = (x-1)^n$.

Corollaire 17: Une transvection est dans $SL(E)$.

Déf 18: Soit ℓ une forme linéaire non nulle sur E . On appelle dilatation d'hyperplan $\text{Ker}(\ell)$ toute application $m \in \mathbb{Z}(E)$ définie par: $\forall x \in E, m(x) = x + \ell(x)a$ où $a \in E \setminus \text{Ker}(\ell)$. On note $S_{\ell,a}$ une telle dilatation.

Théorème 19: Une dilatation $S_{\lambda, a}$ est dans $GL(E)$ ssi $\lambda := 1 + \mathcal{O}(a) \neq 0$.

On appelle alors λ le rapport de dilatation.

Théorème 20: 1) $n \in GL(E)$ est une dilatation ssi il existe un hyperplan H tel que $n|_H = id_H$ et n est diagonalisable de valeurs propres 1 et $\lambda \in K \setminus \{0, 1\}$ (donc $E = \text{Ker}(n - id) \oplus \text{Ker}(n - \lambda id)$).
2) Le conjugué dans $GL(E)$ d'une dilatation est une dilatation de même rapport.

3) Pour dilatation n de rapport λ , on a: $n(x) = (x - a)(\lambda - 1)$
4) L'inverse d'une dilatation de rapport λ est une dilatation de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

Théorème 21: $n \in GL(E)$ est une dilatation de rapport λ ssi il existe une base de E où la matrice de n est:
 $D_n(\lambda) = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = I_m + (\lambda - 1)E_{m, n}$ avec $\lambda \in K \setminus \{0, 1\}$

Théorème 22: Le groupe $SL(E)$ est engendré par les transvections.
Le groupe $GL(E)$ est engendré par les dilatations et les transvections.

III Actions sur les espaces de matrices

1) Action par translation [EOM]

Déf 23: L'application $(P, A) \in GL_n(K) \times M_{n, m}(K) \mapsto PA \in M_{n, m}(K)$ définit une action de $GL_n(K)$ sur $M_{n, m}(K)$, et deux matrices sont dans la même orbite ssi elle ont même noyau.

Remarque 24: On peut définir de même une action à droite par $(P, A) \mapsto AP^{-1}$.

Prop 25: 1) La multiplication à gauche par une matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ a pour effet de multiplier la ligne i par λ .
2) La multiplication à gauche par une matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$ a pour effet de remplacer la ligne i par $l_i + \lambda l_j$.

3) La multiplication à droite par $D_j(\lambda)$ a pour effet de multiplier la colonne j par λ .
4) La multiplication à droite par $T_{ij}(\lambda)$ a pour effet de remplacer la colonne j par $C_j + \lambda C_i$.

Ces opérations sont appelées opérations élémentaires.

Théorème 26: Soit $A \in M_{n, m}(K)$. Il existe une matrice $P \in GL_n(K)$ produit de matrices de dilatation et de transvection tel que la matrice PA soit échelonnée en lignes. Cette matrice PA est donc dans l'orbite de A pour l'action par translation à gauche.

Remarque 27: Cela nous donne un algorithme pour échelonner et réduire une matrice, appelé pivot de Gauss. Cela permet de calculer le rang de la matrice A .

2) Action par équivalence [EOM]

Déf 28: On définit une action de $GL_n(K) \times GL_m(K)$ sur $M_{n, m}(K)$ par $(P, Q), A \mapsto PAQ^{-1}$. Deux matrices dans la même orbite sont dites équivalentes.

Lemme 29: Une matrice $A \in M_{n, m}(K)$ est de rang n ssi elle est équivalente à $A_n = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{n, m}(K)$

Corollaire 30: Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont même rang.

3) Action par conjugaison [EOM]

Prop 31: L'application $(P, A) \in GL_n(K) \times M_n(K) \mapsto PAP^{-1} \in M_n(K)$ définit une action de $GL_n(K)$ sur $M_n(K)$.

Déf 32: Deux matrices qui sont dans la même orbite pour cette action sont dites semblables.

Prop 33: Deux matrices semblables sont équivalentes.

Prop 34: Deux matrices semblables représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes.

Ainsi: deux matrices semblables ont même rang, même tr .

déterminant, même polynôme caractéristique, même polynôme minimal et même trace.

Centre - ex 35: Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

Prop 36: Deux matrices diagonalisables sont dans la même orbite pour cette action si elles ont le même polynôme caractéristique.

IV Un sous-groupe de $GL(E)$: le groupe orthogonal [rom]

On suppose ici que $K=\mathbb{R}$ et on munit E d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ce qui en fait un espace euclidien.

Déf 37: Une isométrie (ou application orthogonale) de E est une application $n: E \rightarrow E$ qui conserve le produit scalaire, c'est-à-dire tel que $\langle n(x), n(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in E$

Déf 38: On note $O(E)$ l'ensemble des isométries de E , appelé groupe orthogonal.

Prop 39: Une application $n: E \rightarrow E$ est une isométrie si elle est linéaire et conserve la norme.

Centre - ex 40: Si e est de norme 1, $n(x) = \|x\|e$ conserve la norme mais n'est pas linéaire.

Théorème 41: Une isométrie est un automorphisme de E et $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

Théorème 42: Soit $n \in O(E)$ et p une base de E . Soit A la matrice de n dans p . On a équivalence entre:

1) n est une isométrie.

2) n transforme p en une base de E .

3) $A^T A = A \cdot A^T = I_n$

Déf 43: On appelle matrice orthogonale, toute matrice réelle A tel que $A^T A = A \cdot A^T = I_n$.

On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

Corollaire 44: $\forall n \in O(E)$, on a $\det(n) = \pm 1$.

Déf 45: On note $SO_n(\mathbb{R}) = \{ A \in O_n(\mathbb{R}) ; \det(A) = 1 \}$ qui est appelé le groupe spécial orthogonal.

Prop 46: $SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe distingué de $O_n(\mathbb{R})$ d'indice 2.

Théorème 47: $O(E)$ est une partie compacte de $\mathcal{L}(E)$

Théorème 48: Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ (resp $S_n^{++}(\mathbb{R})$) si toutes ses valeurs propres sont positives (resp strictement positives).

Théorème 49: Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, alors il existe une unique matrice $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = B^2$.

De plus, si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème 50: Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique décomposition $A = O \cdot S$ où $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Corollaire 51: Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = OS$ où $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Remarque 52: Il n'y a pas unicité dans le corollaire précédent.

Application 53: Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors:

$$\|A\| = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

où ρ est le rayon spectral donné par

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$$

et $\|A\|$ est la norme subordonnée associée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.