1 Leçon 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications

I. Actions de groupes

1. Action d'un groupe sur un ensemble [ULM] [BER]

   Action à gauche, morphisme équivalent, action fidèle, action transitive

2. Orbites et stabilisateurs [BER]

   Stabilisateur, orbite, point fixe, bijection formule des classes

3. Cas fini [ULM] [BER]

   Relation cardinaux orbite-stabilisateur, équation des classes, p-groupe, formule des classes pour un p-groupe, théorème de Cauchy, fixateur de g,

   DEV 1 : formule de Burnside + application

II. Action d'un groupe sur un groupe

1. Action par translation [ULM]

   Action par translation à gauche, théorème de Cayley, action de G sur G/H, prop groupe infini et sous-groupe d'indice fini

2. Action par conjugaison [ULM] [IP]

   Action par conjugaison, classe de conjugaison, centre de G et classe de conjugaison

   DEV 2 : centre d'un p-groupe + classification des groupes d'ordre p^2

III. Actions de groupes sur des espaces de matrices

1. Action par translation [ROM]

   Action par translation à gauche et à droite, lien avec décomposition polaire, matrice de transvection et dilatation, opérations élémentaires, matrice échelonnée-réduite, pivot de Gauss

2. Action par équivalence [ROM]

   Matrices équivalentes, lien entre les orbites et le rang

3. Action par conjugaison [ROM]

   Matrices semblables, invariants de similitude, exemple pour les matrices diagonalisables

Présentation :

- La théorie des actions de groupes permet d'étudier les interactions entre ensembles et ainsi d'obtenir des propriétés sur le groupe agissant ou l'ensemble sur lequel il agit. On aura donc des propriétés par exemple tantôt sur le cardinal du groupe, tantôt sur le cardinal de l'ensemble.
- Le théorème de Cauchy permet de donner une réciproque partielle au théorème de Lagrange.
- La formule de Burnside est très utile en dénombrement.

Développements :

- Formule de Burnside + application

  - Algèbre : le grand combat, Berhuy, p172

  - Carnet de voyage en Algébrie, Caldero-Peronnier, p163

- Classification des groupes d'ordre p^2
  - L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements , Isenmann-Pecatte, p106

Références :

- [ULM] Théorie des Groupes, Ulmer
- [BER] Algèbre : le grand combat, Berhuy
- [IP] L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements , Isenmann-Pecatte
- [ROM] Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi

Leçon 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

I Actions de groupes

1) Action d'un groupe sur un ensemble [ULM][BER]

ULM 27 **Déf 1 :** Soit G un groupe et X un ensemble. On appelle action à gauche de G sur X une application $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ tel que :

1) $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x \quad \forall g, h \in G, \forall x \in X$.
2) $e \cdot x = x \quad \forall x \in X$.

On dit que G agit sur X.

Prop 2 : A une action de G sur X correspond le morphisme

$$\varphi : G \to S(X)$$
$$g \mapsto \sigma_g : X \to X, \quad x \mapsto g \cdot x$$

Remarque 3 : Il y a donc une correspondance bijective entre les actions de G sur X et les morphismes de G dans $S(X)$.

Exemple 4 : Le groupe $S(X)$ des bijections de X agit naturellement sur X par la relation $\sigma \cdot x = \sigma(x)$.

BER 172 **Déf 5 :** On dit que G agit fidèlement sur X si pour tout $g \in G$, on a : $\forall x \in X, g \cdot x = x \Rightarrow g = e$.
Cela équivaut à dire que le morphisme $\varphi : G \to S(X)$ est injectif.

Déf 6 : On dit que G agit transitivement sur X si pour tout $x, x' \in X$ il existe $g \in G$ tel que $x' = g \cdot x$.

Exemple 7 : Soit $G = GL_n(\mathbb{C})$ et $X = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Alors G agit sur X par $G \times X \to X$, $(M, v) \mapsto Mv$. Cette action est fidèle et transitive.

2) Orbites et stabilisateurs [BER]

Déf 8 : L'ensemble $Stab(x) = \{g \in G ; g \cdot x = x\}$ est appelé le stabilisateur de x. C'est un sous-groupe de G. BER 174

Lemme 9 : La relation sur X définie par : $x \sim y$ ssi il existe $g \in G$ tel que $y = g \cdot x$, est une relation d'équivalence.

Déf 10 : Soit $x \in X$. L'ensemble $\mathcal{O}_x = \{g \cdot x ; g \in G\} \subset X$ est appelé orbite de x sous l'action de G. Il s'agit de la classe d'équivalence de x pour la relation d'équivalence du lemme précédent.

Remarque 11 : Les orbites de X sous l'action de G forment donc une partition de X.

Remarque 12 : Une action est transitive ssi il n'existe qu'une unique orbite.

Déf 13 : On dit que $x \in X$ est un point fixe sous l'action de G si l'on a $g \cdot x = x \quad \forall g \in G$. On note X^G l'ensemble des points fixes.

Prop 14 : Soit $x \in X$. L'application suivante est bijective :

$$\bar{f} : G/Stab(x) \to \mathcal{O}_x, \quad \bar{g} \mapsto g \cdot x.$$

3) Cas fini [ULM][BER]

On suppose ici que G et X sont finis.

Prop 15 : Soit $x \in X$. Alors : $|G| = |\mathcal{O}_x| \times |Stab(x)|$. ULM 67

Théorème 16 (formule des classes) : Si $\{x_1, \dots, x_n\}$ est un système de représentants des orbites, alors :

$$|X| = \sum_{i=1}^{n} |\mathcal{O}_{x_i}| = \sum_{i=1}^{n} \frac{|G|}{|Stab(x_i)|}.$$

Déf 17 : Soit p un nombre premier. Un p-groupe est un groupe dont l'ordre est une puissance de p. ULM 70

Prop 18 : Soit G un p-groupe agissant sur X. Alors : ULM 69

$$|X^G| \equiv |X| \; [p]$$

Théorème 19 (de Cauchy): Soit G un groupe fini d'ordre divisible par un nombre premier p. Alors il existe un élément d'ordre p dans G.

ROM 32 **Corollaire 20:** Soit G un groupe dont tout élément est d'ordre $\leqslant 2$. Alors G est commutatif, et si G est fini alors son cardinal est une puissance de 2.

BER 178 **Déf 21:** Soit $g \in G$. On pose $Fix(g) = \{x \in X \,;\, g \cdot x = x\}$, l'ensemble des points fixes par g.

Prop 22 (formule de Burnside): Soit Ω l'ensemble des orbites de X sous l'action de G. Alors:

$$|\Omega| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|.$$

DEV 1

CAL 163 **Application 23:** On considère l'action de S_n sur $X = [\![1 ; n]\!]$. Soit Y la variable aléatoire sur S_n qui associe à $\sigma \in S_n$ son nombre de points fixes $Fix(\sigma)$.
Alors $\mathbb{E}(Y) = 1$ et $Var(Y) = 1$.

II Action d'un groupe sur un groupe

1) Action par translation [ULM]

ULM 31 **Prop 24:** Un groupe G agit sur lui-même par translation à gauche via: $\begin{array}{l} G \times G \to G \\ (g,h) \mapsto gh \end{array}$. Cette action est fidèle et transitive.

Corollaire 25 (théorème de Cayley): Tout groupe fini d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe de S_n.

Prop 25: Soit H un sous-groupe de G. Alors G agit sur G/H via: $\begin{array}{l} G \times G/H \to G/H \\ (g, \bar{g}H) \mapsto (g\bar{g})H \end{array}$. Cette action est transitive.

Prop 26: Soit G d'ordre n et $H \subset G$ un sous groupe d'indice k tel que n ne divise pas $k!$. Alors il existe dans G un sous-groupe distingué N distinct de $\{e\}$ et inclus dans H.

2) Action par conjugaison [ULM] [IP]

Prop 27: Un groupe G agit sur lui-même par conjugaison via: $\begin{array}{l} G \times G \to G \\ (g,h) \mapsto ghg^{-1} \end{array}$ ULM 33

Déf 28: L'orbite $\{ghg^{-1} \,;\, g \in G\}$ de $h \in G$ sous l'action par conjugaison de G sur lui-même s'appelle la classe de conjugaison de h.
Deux éléments dans la même classe de conjugaison sont dits conjugués.

Lemme 29: Soit $g \in G$. Alors $g \in Z(G)$ ssi sa classe de conjugaison est réduite à un seul élément. ULM 40
Ainsi $Z(G)$ est l'union des classes de conjugaison de taille 1.

Lemme 30: Soit G un groupe. Si $G/Z(G)$ est monogène, alors G est abélien. IP 106

Prop 31: Le centre d'un p-groupe est non trivial.

Prop 32: Tout groupe d'ordre p^2 est abélien. DEV 2

Théorème 33: Soit G un groupe d'ordre p^2 avec p premier.
Alors: $G \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

III Actions de groupes sur des espaces de matrices

Soit K un corps commutatif

1) Action par translation [ROM]

Théorème 34: L'application $\begin{array}{l} GL_n(K) \times M_{n,m}(K) \to M_{n,m}(K) \\ (P, A) \mapsto PA \end{array}$ ROM 184

définit une action de $GL_n(K)$ sur $M_{n,m}(K)$ et deux matrices sont dans la même orbite ssi elle ont même noyau.

Remarque 35: On peut aussi définir une action de translation à droite.

Théorème 36: Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = OS$ où $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$. Donc il existe dans l'orbite de A un représentant symétrique positif pour l'action de $O_n(\mathbb{R})$ sur $M_n(\mathbb{R})$ par translation à gauche.

ROM 198 **Déf 37 :** Une matrice de transvection est une matrice carrée de la forme $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ avec $1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in K$.
Une matrice de dilatation est une matrice carrée de la forme $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1) E_{ii}$ avec $1 \leq i \leq n$ et $\lambda \in K^*$

Prop 38 :
- La multiplication à gauche par une matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ a pour effet de multiplier la ligne i par λ.
- La multiplication à gauche par une matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$ a pour effet de remplacer la ligne L_i par $L_i + \lambda L_j$.
- La multiplication à droite par $D_j(\lambda)$ a pour effet de multiplier la colonne j par λ.
- La multiplication à droite par $T_{ij}(\lambda)$ a pour effet de remplacer la colonne C_j par $C_j + \lambda C_i$.

Les opérations sont appelées opérations élémentaires.

Théorème 39 : Soit $A \in M_{n,m}(K)$. Il existe une matrice $P \in GL_n(K)$ produit de matrices de dilatation et de transvection tel que PA soit échelonnée en lignes. Cette matrice PA est donc dans l'orbite de A pour l'action par translation à gauche.

Remarque 40 : Cela prouve la pertinence du pivot de Gauss.

2) Action par équivalence [ROM]

ROM 94 **Lemme 41 :** Une matrice $A \in M_{n,m}(K)$ est de rang r ssi elle est équivalente à $A_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $r \in [\![0; \min(n,m)]\!]$.

Application 42 : $GL_n(K)$ est dense dans $M_n(K)$.

Théorème 43 : Soit $G = GL_n(K) \times GL_m(K)$. L'application
$$\begin{array}{rcl} G \times M_{n,m}(K) & \to & M_{n,m}(K) \\ ((P,Q), A) & \mapsto & PAQ^{-1} \end{array}$$
définit une action à gauche de G sur $M_{n,m}(K)$ dont les orbites sont les ensembles $O_r = \{A \in M_{n,m}(K) ; rg(A) = r\}$ où $r \in [\![0; \min(n,m)]\!]$.

Théorème 44 : Deux matrices de $M_{n,m}(K)$ qui se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sont de même rang, donc dans la même orbite. ROM 198

3) Action par conjugaison [ROM]

Théorème 45 : L'application ROM 199
$$\begin{array}{rcl} GL_n(K) \times M_n(K) & \to & M_n(K) \\ (P, A) & \mapsto & P.A.P^{-1} \end{array}$$
définit une action de $GL_n(K)$ sur $M_n(K)$.

Déf 46 : Deux matrices qui sont dans la même orbite pour cette action sont dites semblables.

Prop 47 : Deux matrices semblables sont équivalentes.

Prop 48 : Deux matrices semblables ont : même rang, même déterminant, même polynôme caractéristique, même polynôme minimal, même trace.

Contre-ex 49 : Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont même trace, même déterminant et même polynôme caractéristique mais ne sont pas semblables. Ø

Prop 50 : Une matrice est diagonalisable (resp trigonalisable) ssi son orbite pour cette action contient une matrice diagonale (resp triangulaire). ROM 199