

Références :

Oraux X ENS - Algèbre 2, Serge Francinou

Lemme. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $Tr(A^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ alors A est nilpotente.

Démonstration. Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$. Raisonnons par l'absurde et supposons A non nilpotente. Si A n'admettait que des valeurs propres nulles alors son polynôme caractéristique serait X^n . On aurait donc que A serait nilpotente. Ainsi, A possède des valeurs propres (complexes) non nulles. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ces valeurs propres non nulles ($r \geq 1$) et $n_1, \dots, n_r$ leur multiplicité respectives. Pour tout $k \geq 1$, on a

$$Tr(A^k) = n_1\lambda_1^k + \dots + n_r\lambda_r^k = 0.$$

Ecrivons maintenant ces relations pour k variant de 1 à r , on obtient que $(n_1, \dots, n_r)$ est solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \dots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = 0$$

On cherche donc à calculer le déterminant de la matrice.

$$\begin{aligned} D(\lambda_1, \dots, \lambda_r) &= \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \dots & \lambda_r^r \end{vmatrix} \\ &= \lambda_1 \dots \lambda_r \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{vmatrix} \\ &= \lambda_1 \dots \lambda_r V(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \end{aligned}$$

Posons $P(X) = V(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r-1}, X)$. C'est un polynôme de degré au plus $r - 1$. Le développement par rapport à la dernière colonne permet de constater que le coefficient en X^{r-1} est $V(\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1})$. De plus, si on substitue λ_i à X ($1 \leq i \leq r - 1$), deux colonnes sont identiques et on a $P(\lambda_i) = 0$. Les λ_i étant deux à deux distincts, P est divisible par $\prod_{i=1}^{r-1} (X - \lambda_i)$, polynôme unitaire de degré $r - 1$. Il en résulte que

$$P(X) = V(\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}) \prod_{i=1}^{r-1} (X - \lambda_i),$$

et, en particulier,

$$P(\lambda_r) = V(\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}) \prod_{i=1}^{r-1} (\lambda_r - \lambda_i).$$

On obtient donc, par récurrence, la formule

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_j - \lambda_i).$$

On obtient donc

$$D(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = \lambda_1 \dots \lambda_r \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0.$$

On a donc un système de Cramer. Nécessairement, on a

$$n_1 = \dots = n_r = 0$$

ce qui est exclu.

Théo (Burnside). *Un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini (ie il existe un entier N tel que $A^N = Id$ pour toute matrice A du groupe) est fini.*

Démonstration. Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$, $(M_i)_{1 \leq i \leq m} \in G^m$ une base de $Vect(G)$ et

$$\begin{aligned} f : G &\longrightarrow \mathbb{C}^m \\ A &\longmapsto (Tr(AM_i))_{1 \leq i \leq m}. \end{aligned}$$

Montrons que si $f(A) = f(B)$ alors $AB^{-1} - I_n$ est nilpotente. Posons $D = AB^{-1}$. Par linéarité de la trace, on a $Tr(AM) = Tr(BM)$ pour toute matrice $M \in Vect(G)$ et en particulier, pour toute matrice M de G . Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a

$$Tr(D^k) = Tr(A \underbrace{B^{-1}D^{k-1}}_{\in G}) = Tr(BB^{-1}D^{k-1}) = Tr(D^{k-1})$$

Il en résulte donc que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$Tr(D^k) = Tr(I_n) = n.$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$Tr(D - I_n)^k = Tr\left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j D^{k-j}\right) = n \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} = n(1-1)^k = 0$$

On a le résultat avec le lemme.

Soit maintenant G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini N . Toute matrice A de G est annulée par le polynôme $X^N - 1$ scindé à racines simples. Ainsi, toute matrice de G est diagonalisable.

Montrons maintenant que f est injective.

Soit $A, B \in G$ telles que $f(A) = f(B)$. La matrice $D = AB^{-1}$ est dans G . Elle est donc diagonalisable. Alors $D - I_n$ est aussi diagonalisable. Comme on sait que cette matrice est nilpotente, on a qu'elle est nulle. Ainsi, $D = I_n$ et donc $A = B$. On a donc bien que f est injective. Posons

$$X = \{Tr(A), A \in G\}$$

On a donc que l'image de f est incluse dans X^m . Il suffit donc de montrer que X est fini. Or, les valeurs propres des éléments de G appartiennent à l'ensemble des racines $N^{\text{ième}}$ de l'unité. Donc X est fini. $\square$

Leçons possibles : 104 - 106 - 157

Questions posées :

- Que se passe-t-il si on se place dans $GL_n(\mathbb{Q})$? Réponse : Quitte à se placer dans $GL_n(\mathbb{C})$, on montre que le groupe est fini.
- Que se passe-t-il si on se place dans $GL_n(\mathbb{F}_p)$? Réponse : Il y a un problème au moment de la résolution du système d'équations linéaires dans le lemme. En effet, on aurait $(n_1, \dots, n_r) = (0, \dots, 0)$ dans $\mathbb{F}_p$ ce qui ne correspond au $(0, \dots, 0)$ dans $\mathbb{N}^r$ car la caractéristique est p . Ce théorème n'est donc vrai qu'en caractéristique nul.