

Leçon 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

I Existence et unicité

1 Compacité et coercivité

- Théorème des bornes
- Application : DEV 1 : Équivalence des normes
- Lien continuité/coercivité
- Application : DEV 1 suite : Théorème de Riesz
- Application : distance à une partie

2 Convexité

- Stricte convexité \implies au plus 1 minimum
- Application : Point de Fermat
- f convexe et x minimum local $\implies x$ minimum global

II Recherche et caractérisations

1 Conditions au 1^{er} ordre

- x minimum local $\implies df_x = 0$
- Contre-exemple de $x \mapsto x^3$
- Application au théorème de Rolle, méthode de Newton
- Réciproque vraie dans le cas convexe

2 Conditions au 2^e ordre

- $df_x = 0$ et x minimum local $\implies d^2f_x \geq 0$
- $df_x = 0$ et $d^2f_x > 0 \implies x$ minimum local
- Réciproque vraie dans le cas convexe

III Cadre hilbertien

- DEV 2 : Projection sur un convexe fermé
- Corollaire : projection sur un sev fermé
- Corollaire : $H = F \oplus F^\perp$
- Corollaire : $\overline{F} = H \iff F^\perp = \{0\}$
- Corollaire : théorème de représentation de Riesz