Leçon 215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

I Fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^n$

1 Définitions et premières propriétés

- Définition, lien avec la notion de dérivabilité en dimension 1
- Définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$
- Exemples
- f différentiable $\implies f$ continue
- Chain rule
- Définition des dérivées partielles

2 Inégalité des accroissements finis et conséquences

- Inégalité des accroissements finis
- Corollaire : $df = 0 \iff f$ constante
- f est $\mathcal{C}^1 \iff f$ a des dérivées partielles continues

II Théorème d'inversion locale

- Théorème d'inversion locale
- Application : Racine k-ième d'une matrice
- DEV 1 : Fonction dont la différentielle en tout point est une isométrie

III Optimisation

1 Conditions nécessaires de minimalité

- Définition du gradient, de la hessienne
- x minimum local $\implies \nabla f(x) = 0$
- Formule de Taylor
- $\nabla f(x) = 0$ et x minimum local $\implies Hess\, f(x) \geq 0$
- $\nabla f(x) = 0$ et $Hess\, f(x) > 0 \implies x$ minimum local strict

2 Cas des fonctions convexes

- Caractérisations de la convexité
- f strictement convexe $\implies f$ admet un unique minimum
- DEV 2 : Point de Fermat