Leçon 213 : Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

I Espaces préhilbertiens

1 Produit scalaire et norme

- Produit scalaire, norme associée
- Inégalité de Cauchy-Schwarz, Minkowski
- Identité du parallélogramme, formule de polarisation
- Caractérisation des normes hilbertiennes par l'identité du parallélogramme

2 Orthogonalité

- Théorème de Pythagore
- Orthogonal d'une partie

3 Espaces de Hilbert

- l^2 est un Hilbert
- DEV 1 : L^2 est un Hilbert

II Propriétés des Hilbert

1 Théorème de projection est ses conséquences

- DEV 2 : Théorème de projection sur un convexe fermé
- Corollaire : Projection sur un sev fermé
- Corollaire : $H = F \oplus F^\perp$
- Corollaire : F dense $\iff F^\perp = \{0\}$

2 Bases hilbertiennes

- Notion de famille orthonormée, inégalité de Bessel
- Notion de base hilbertienne
- $x = \sum < x, e_i > e_i$
- Égalité de Parseval

3 Théorème de représentation de Riesz

- Théorème de représentation de Riesz
- Définition du gradient via Riesz
- Existence de l'adjoint d'une application linéaire

III Application aux séries de Fourier

- Notion de série de Fourier dans $L^1_{2\pi}$
- $L^2_{2\pi}$ est un Hilbert
- Théorème de Fejér $\implies (e_n = e^{in\cdot})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$
- $f = \sum c_n(f) e_n$ dans $L^2_{2\pi}$
- Calcul de $\sum \frac{1}{n^4}$ via Parseval