

Leçon 206 : Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.

I Topologie dans les evn de dimension finie

1 Résultats topologiques

- Les compacts de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ sont les fermés bornés
- Notion d'équivalence de normes, exemples
- DEV 1 : Équivalence des normes
- Corollaire : Un espace de dimension finie est complet
- Corollaire : Un sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé

2 Applications linéaires

- Définition de la continuité d'application linéaire
- Elles sont continues en dimension finie, contre-exemples en dimension infinie

3 Compacité

- En dimension finie, les compacts sont les fermés bornés
- Une suite bornée converge ssi elle admet une unique valeur d'adhérence
- Application : L'exponentielle réalise un homéomorphisme entre $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
- DEV 1 suite : Théorème de Riesz

II Calcul différentiel

- Définition de la différentielle
- Lien entre différentielle et dérivées partielles en dimension finie
- Définition de la jacobienne
- df_x est un isomorphisme ssi $\det(Jac_x f) \neq 0$
- Ce résultat est utile pour vérifier les hypothèses du théorème d'inversion locale

III Équations différentielles linéaires

- DEV 2 : Théorème du point fixe de Picard + Application au théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire
- Dimension de l'espace des solutions

IV Espaces hilbertiens et projection

1 Généralités

- Tout espace vectoriel de dimension finie est un espace de Hilbert
- Orthonormalisation de Gram-Schmidt, théorème de Riesz dans un Hilbert
- Projection sur un convexe fermé
- Application : Projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

2 Application aux séries de Fourier

- $D = \{f \in \mathcal{C}_{2\pi}; \forall x, f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}\}$ est un espace préhilbertien dont $(e_n = e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormale
- $D = \mathcal{P}_N \oplus \mathcal{P}_N^\perp$ où $\mathcal{P}_N = Vect(e_n, -N \leq n \leq N)$
- $S_N(f) = proj_{\mathcal{P}_N}(f)$