# Leçon 150 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

## I Polynômes d'endomorphisme

### 1 L'algèbre $\mathbb{K}[u]$

- Si $dim\, E < +\infty$ alors $dim\, \mathbb{K}[u] < +\infty$
- $\mathbb{K}[u]$ est une algèbre commutative
- Lemme des noyaux

### 2 Polynômes annulateurs

- Définition d'un polynôme annulateur, existence en dimension finie
- Théorème de Cayley-Hamilton
- L'ensemble des polynômes annulateurs est un idéal de $\mathbb{K}[X]$

### 3 Polynôme minimal

- Définition du polynôme minimal $\pi_u$
- $\mathbb{K}[u] \simeq \mathbb{K}[X]/(\pi_u)$, donc $dim\, \mathbb{K}[u] = deg\, \pi_u$ et $\mathbb{K}[u]$ est un corps ssi $\pi_u$ est irréductible
- $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} Ker(u - \lambda\, id)^{m_\lambda}$ si $\pi_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$

## II Utilisation des polynômes d'endomorphisme pour la réduction

### 1 Diagonalisation

- $\chi_u$ scindé à racines simples $\implies$ $u$ diagonalisable
- $u$ diagonalisable ssi $\exists$ un polynôme annulateur scindé à racines simples ssi $\pi_u$ scindé à racines simples

### 2 Trigonalisation

- $u$ trigonalisable ssi $\exists$ un polynôme annulateur scindé ssi $\chi_u$ scindé ssi $\pi_u$ scindé
- Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos et $u$ nilpotent alors $u$ est trigonalisable

### 3 Décomposition de Dunford

- Théorème de décomposition de Dunford
- DEV 1 : Décomposition de Newton algorithmique

## III Applications

### 1 Calcul de puissances

- $P(u) = 0$ et $deg\, P = m \implies \forall k, u^k \in Vect(u^j, j \leq m-1)$
- Calcul de puissances à partir de la décomposition de Dunford, via la diagonalisation

### 2 Calcul d'inverse

- $P(u) = 0$ et $P(0) \neq 0 \implies u$ est inversible et $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$
- $u$ inversible ssi $\pi_u(0) \neq 0$

### 3 Exponentielle de matrices / endomorphismes

- Décomposition de Dunford de l'exponentielle, $u$ est diagonalisable ssi $e^u$ l'est
- Sur $\mathbb{C}, e^u \in \mathbb{C}[u]$
- DEV 2 : Surjectivité de l'exponentielle matricielle