

Leçon 149 : Déterminant. Exemples et applications.

I Construction du déterminant

1 Formes multi-linéaires alternées

- Définition, dimension de l'espace des formes multi-linéaires alternées
- Une forme alternée est anti-symétrique et la réciproque est vraie en caractéristique différente de 2

2 Déterminant d'une famille de vecteurs

- L'espace des formes n -linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1, engendré par $\det_{\mathcal{B}}$
- Formule explicite du déterminant dans une base
- Relation de Chasles : $\det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$
- Caractérisation des familles liées

3 Déterminant d'un endomorphisme et d'une matrice

- Définition, ne dépend pas de la base
- Propriétés calculatoires

II Calcul de déterminant

1 Propriétés élémentaires

- Déterminant nul si les lignes/colonnes sont liées, invariant par combinaisons linéaires des lignes/colonnes
- Exemples du déterminant par blocs et des matrices triangulaires

2 Formules importantes

- Développement par rapport à une ligne/colonne
- Définition de la comatrice, formule de la comatrice
- Déterminant de Vandermonde
- Système de Cramer

III Interprétation géométrique

- Le déterminant d'une famille de vecteurs est le volume signé du paralléloèdre qu'ils engendrent
- $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda(u(A)) = |\det(u)|\lambda(A)$, formule de changement de variable
- **DEV 1 : Déterminant de Gram + Distance à un sous-espace vectoriel + Inégalité de Hadamard**

IV Utilisations en algèbre linéaire

1 Groupe linéaire

- Le déterminant est un morphisme de groupes, $GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^*$
- **DEV 2 : $GL_n(\mathbb{C})$ est dense, ouvert, connexe par arc**

2 Réduction d'endomorphismes

- Polynôme caractéristique, lien déterminant/valeur propre
- $\det(u) = \prod_{\lambda \in Sp(u)} \lambda, \quad \det(e^u) = e^{Tr(u)}$
- Déterminant de la matrice compagnon, utilisation dans la preuve de Cayley-Hamilton