

# Leçon 127 : Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications.

## I Nombres remarquables

### 1 Nombre $e$ et $\pi$

- Définition de l'exponentielle complexe
- Propriétés
- $e := \exp(1)$
- Définition de  $\pi$
- $e^{i\pi} + 1 = 0, e, \pi \notin \mathbb{Q}$

### 2 Nombres algébriques et transcendants

- Définitions
- Théorème de Liouville, nombres de Liouville
- $e, \pi$  et  $e^\pi$  sont transcendants mais on ne sait pas si  $e + \pi$  et  $\pi^e$  sont irrationnels

## II Anneaux de nombres algébriques

### 1 Nombres algébriques

- Notion de polynôme minimal, il est irréductible (on se place uniquement sur  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{C}$ )
- DEV 1 : Critères d'algébricité +  $\bar{\mathbb{Q}}$  est un corps algébriquement clos

### 2 Anneau des entiers de Gauss

- Définition, norme, inversibles
- L'ensemble des sommes de 2 carrés est stable par produit
- DEV 2 :  $\mathbb{Z}[i]$  est euclidien + Théorème des 2 carrés
- Irréductibles de  $\mathbb{Z}[i]$

### 3 Corps cyclotomiques

- Notion de racines primitives de l'unité, elles sont algébriques
- Définition polynômes cyclotomiques, quelques propriétés
- $[\mathbb{Q}(U_n) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$
- Intersection de 2 corps cyclotomiques