Leçon 125 : Extensions de corps. Exemples et applications.

I Notion d'extension de corps

1 Définitions et premières propriétés

- Définition, exemples
- La caractéristique est invariante par extension de corps
- $k \subset \mathbb{K} \implies \mathbb{K}$ est un k-espace vectoriel, de dimension est appelée degré de l'extension
- Théorème de la base téléscopique
- cf. Figure 1 - Extension de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

2 Extensions et éléments algébriques

- Définition élément algébrique/transcendant, extension algébrique
- Définition du polynôme minimal
- DEV 1 : Critère d'algébricité + L'ensemble des nombres algébriques sur un corps est un corps

II Liens avec les polynômes

1 Corps de rupture/décomposition

- Définition corps de rupture
- Existence et unicité
- P irréductible sur $k \implies \mathbb{K} := k[X]/(P)$ est un corps de rupture et $[\mathbb{K} : k] = \deg(P)$
- $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/(X^2+1), \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}[X]/(X^3-2)$
- Définition corps de décomposition
- Existence et unicité
- $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \neq D_{\mathbb{Q}}(X^3-2)$

2 Clôture algébrique

- Définition d'un corps algébriquement clos
- DEV 1 suite : Si le surcorps est algébriquement, alors l'ensemble des nombres algébriques est algébriquement clos
- Définition clôture algébrique
- $\mathbb{C}$ est la clôture algébrique de $\mathbb{R}$
- Existence et unicité

3 Construction des corps finis

- $\mathbb{F}_q := D_{\mathbb{F}_p}(X^q - X)$ où $q = p^n$
- Si $|\mathbb{K}| = p^n$, alors $\forall k \subset \mathbb{K}, |k| = p^d$ où $d|n$
- Si $|\mathbb{K}| = p^n$, alors $\forall d|n, \exists! k \subset \mathbb{K}$ tel que $|k| = p^d$
- cf. Figure 2 - Sous-corps de $\mathbb{F}_{2^{12}}$

III Polynômes et corps cyclotomiques

- Définition racines primitives de l'unité
- $X^n - 1 = \prod_{d|n} \phi_d$ dont on déduit $\phi_n \in \mathbb{Z}[X]$
- ϕ_n est irréductible sur $\mathbb{Z}$
- DEV 2 : Intersection de corps cyclotomiques

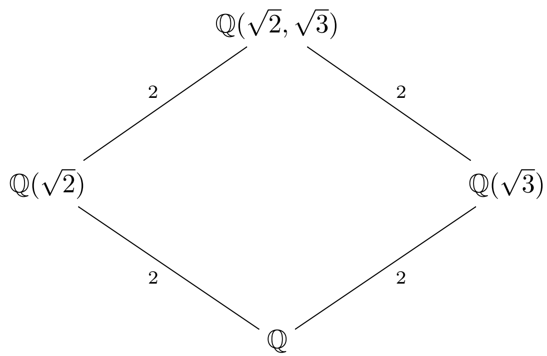

FIGURE 1 – Exemple d'extension de corps

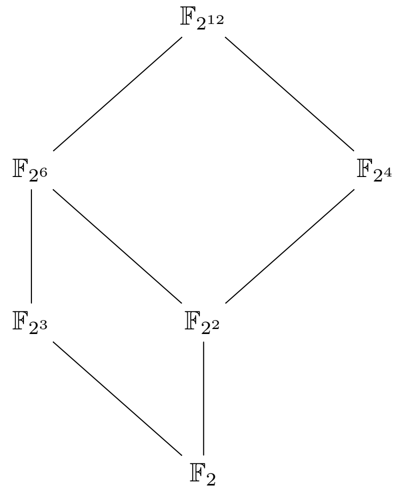

FIGURE 2 – Sous-corps de $\mathbb{F}_{2^{12}}$