

Leçon 108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

I Générateurs d'un groupe

1 Définitions et premiers exemples

- 2 définitions du groupe engendré par une partie (une comme une intersection, l'autre explicite)
- Groupe engendré par un élément, $\text{ord}(g) := | \langle g \rangle |$
- Théorème de Lagrange
- On peut définir un morphisme uniquement par son image sur les générateurs

2 Groupes monogènes et cycliques

- Si G est monogène, alors $G \simeq \mathbb{Z}$ s'il est infini, sinon $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où $n = |G|$
- Les générateurs de $\langle g \rangle$ sont les g^k où $\text{pgcd}(n, k) = 1$
- Corollaire : générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- $|G| = p$ premier $\implies G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ cyclique
- Théorème de Cauchy
- Corollaire : G abélien et $G = pq$ avec p, q distincts $\implies G \simeq \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$

3 Groupe dérivé

- Définition
- Il caractérise le caractère abélien
- $G/D(G)$ est abélien
- G/H abélien $\iff D(G) \subset H$

II Groupe symétrique

- Engendré par les cycles
- Autres générateurs
- Les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$
- **DEV 1 : Les 3-cycles engendrent $\mathfrak{A}_n$ + Simplicité de $\mathfrak{A}_n$**
- $D(\mathfrak{S}_n) = D(\mathfrak{A}_n) = \mathfrak{A}_n$

III En algèbre linéaire

1 Groupe linéaire

- Générateurs de $GL_n(\mathbb{K}), SL_n(\mathbb{K})$, lien avec le pivot de Gauss
- Application : $GL_n(\mathbb{C})$ et $SL_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs
- $D(GL_n(\mathbb{K})) = D(SL_n(\mathbb{K})) = SL_n(\mathbb{K})$, sauf cas particuliers

2 Groupe orthogonal

- Définition d'une réflexion et d'un renversement
- **DEV 2 : Générateurs de $O(E)$ et de $SO(E)$**