Leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

I Définitions et généralités

1 Point de vue endomorphisme

- Définitions équivalentes

2 Point de vue matriciel

- Définitions équivalentes
- $GL_n(\mathbb{K}) \simeq GL(E)$
- dim $GL_n(\mathbb{K}) = n^2$

II Actions de $GL_n(\mathbb{K})$ sur des espaces de matrices

1 Translation et pivot de Gauss

- Opérations élémentaires, transvections, dilatations
- Lien avec le pivot de Gauss

2 Equivalence

- Caractérisation par le rang
- Corollaire : $rg({}^tA) = rg(A)$

3 Conjugaison

- Lien avec le changement de base et la réduction
- Quelques invariants de similitude

III Groupe $GL_n(\mathbb{K})$

1 Propriétés

- Centre, groupe dérivé
- Générateurs
- $\mathfrak{S}_n \hookrightarrow GL_n(\mathbb{K})$

2 Quelques sous-groupes

- $SL_n(\mathbb{K})$, ses générateurs, $GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^*$
- Groupes projectifs linéaire
- Groupe orthogonal

3 Sur un corps fini

- Cardinal de $GL_n(\mathbb{F}_q), SL_n(\mathbb{F}_q)$, des groupes projectifs linéaires
- DEV 1 : Isomorphismes exceptionnels

IV Propriétés topologiques

- DEV 2 : $GL_n(\mathbb{C})$ est dense, ouvert, connexe
- $GL_n(\mathbb{R})$ a 2 composantes connexes
- $SL_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs