

Leçon 105 : Groupes des permutations d'un ensemble fini. Applications.

I Le groupe $\mathfrak{S}_n$

1 Définitions et exemples

- Définitions
- Structure de groupe
- Ecriture en tableau
- Quelques calculs
- $|\mathfrak{S}_n| = n!$

2 Propriétés

- $Z(\mathfrak{S}_n) = \{id\}, \forall n \geq 3$
- Conjugué d'un cycle, 2 cycles sont conjugués ssi ils sont de même longueur
- Décomposition d'une permutation en produits de cycles à support disjoint
- Exemples de générateurs
- $\exists!$ morphisme non trivial de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbb{C}^*$

II Signature et groupe alterné

1 Signature d'une permutation

- Définition
- C'est un morphisme
- Calcul de la signature d'une transposition, d'un cycle

2 Le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$

- Définition
- $\mathfrak{A}_n \triangleleft \mathfrak{S}_n, |\mathfrak{A}_n| = \frac{n!}{2}$
- $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles
- Les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$
- **DEV 1 : Simplicité de $\mathfrak{A}_n$**
- Sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$
- $D(\mathfrak{S}_n) = D(\mathfrak{A}_n) = \mathfrak{A}_n$

III Applications

1 Actions de groupes

- $G \curvearrowright X \iff \exists \varphi : G \rightarrow \mathfrak{S}(X)$ morphisme
- Théorème de Cayley, G fini s'injecte dans $GL_{|G|}(\mathbb{F}_p)$
- $[\mathfrak{S}_n : H] = n \implies H \simeq \mathfrak{S}_{n-1}$
- **DEV 2 : Isomorphismes exceptionnels**

2 Géométrie (IMPASSE)

- $\mathfrak{S}_3 \simeq \{\text{isométries conservant un triangle équilatéral}\} = D_3$
- $\mathfrak{S}_4 \simeq \{\text{isométries conservant un tétraèdre régulier}\}$
- $\mathfrak{A}_4 \simeq \{\text{isométries directes conservant un tétraèdre régulier}\}$