

Leçon 104 : Groupes finis. Exemples et Applications.

I Généralités

1 Définitions et premiers résultats

- Définition de l'ordre d'un groupe, d'un élément
- Définition du groupe quotient, de l'indice
- Théorème de Lagrange

2 Exemples de groupes finis remarquables

- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- \mathfrak{S}_n et propriétés
- \mathfrak{A}_n et propriétés
- **DEV 1 : Simplicité de \mathfrak{A}_n**
- Groupe diédral et propriétés

II Groupes abéliens finis

1 Groupes cycliques

- Propriétés, caractérisation
- Théorème chinois

2 Théorie des caractères

- Définition d'un caractère, du groupe dual
- $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- G, H abéliens finis $\implies \widehat{G \times H} \simeq \widehat{G} \times \widehat{H}$
- Lemme de prolongement des caractères

3 Classification des groupes abéliens finis

- Exposant d'un groupe abélien fini, définitions équivalentes
- Théorème de classification

III Actions de groupes

1 Résultats importants

- Théorème de Cayley
- Equation aux classes
- p-groupes, $|G| = p^2 \implies G$ est abélien
- Théorème de Cauchy
- Probabilité que 2 éléments commutent dans un groupe fini

2 Théorèmes de Sylow

- **DEV 2 : 3 théorèmes de Sylow**
- Corollaire : un p-Sylow est distingué ssi c'est le seul p-Sylow
- Application à la simplicité de certains groupes
- $|G| = pq$ avec $p < q$ et $p \nmid q - 1 \implies G \simeq \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$